T 24766

2022

C IV R 104

ani - 1922 - 1933

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL XII.

—

ANUL 1932—1933.

BIBLIOTECA ASTRA SIBIU

TIMIȘOARA
INSTITUT DE ARTE GRAFICE „TIPOGRAFIA ROMANEASCA"
1933

'05
JAN 2014

I 24766

ANUL XII. 15 MARTIE 1932 NO 1.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 SUB-LOCOT. IOAN GH. ZAMFIRESCU PROPRIETATI IN LEGATURA CU ANTICENTRUL PATRULATERELOR INSCRIPTIBILE
2. NOTE MATEMATICE: 1, 2.
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 514, 518, 1013 1029, 1030.
5. PROBLEME PROPUSE: 1080-1087.
6. INFORMATIUNI

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU
TIMISOARA

2460

Institut de artegrafice „Tipografia Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

Revista Matematică din Timişoara,

apare sub conducerea unui Comitet compus din:

1. **Abason E.** Inginer, Doctor în Matematici, Justinian 20, Bucureşti.
2. **Abramescu N.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
3. **Adam D. R.** Sublt. de geniu, str. M. Cogâlniceanu 31, Bucureşti.
4. **Adamescu M.** Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, str. Flondor 37, Cernăuţi.
5. **Alaci V.** Doctor în Matematici, Profesor la Şc. Politechnică Timişoara.
6. **Anastasiade I.** Inginer, Profesor de Material Rulant de cale Ferată, inzestrarea căilor ferate, intinderea exploatării.
7. **Andronescu P.** Doctor Inginer, Profesor de Electrotechnică.
8. **Angelescu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
9. **Angheluţă Th.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
10. **Ardeleanu Şt.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Maşini Termice.
11. **Arghir I.** Profesor la Liceul din Tg.-Jiu.
12. **Bakony C.** Inginer, Profesor de Technologie.
13. **Balazs D.** Inginer, Asistent la Şc. Politechnică, str. Gen. Joffre 12, Timişoara.
14. **Bănărescu M.** Inginer la Atelierele C. F. R., Profesor la Politechnică, str. Doja 51, Timişoara.
15. **Banciu I.** Prof, Dir. General al Contabilităţii în Ministerul de Instrucţie, str. Lucaci 95, Bucureşti.
16. **Bărglăzan A.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Electrotechnică.
17. **Baron C.** Asistent la catedra de Fizică, Şc. Politechnică, Timişoara.
18. **Blaşian V.** Inginer de Mine, Rector al Şc. Politechnice, din Timişoara.
19. **Bobârnac M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Maşini Termice.
20. **Botez M.** Profesor la Şc. Normală şi liceul Milit. str. Speranţei 12, Iaşi.
21. **Bratu Gh.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
22. **Breazu D.** Profesor la Liceul din Caracal.
23. **Buicliu Gh.** Colonel de Artilerie. Fost 10 ani Profesor de Geometria Analitică la Şcoala Politechnică din Timişoara. Direcţia Armamentului din Ministerul Armatei. Preşedintele Comisiunilor militare române din Brno, Bratislava, Pardubice şi Povaszka Bystrica, Cehoslovahia. Brno, Hotel Slavia. Cehoslovahia.
24. **Călniceanu C.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Organe de Maşini Conferenţiar.
25. **Cândea C.** Doctor-inginer, Profesor la Şc. Politechnică din Timişoara.
26. **Catona V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice.
27. **Coca A.** Licenţiat în Litere, Lector de limba Engleză.
28. **Coman A.** Profesor Lic. C. Diaconovici-Loga Conferenţiar la Şc. Politechnică, str. Feldioara 1, Timişoara.
29. **Constantinescu Gh.** Profesor, lic. Lazăr, Bucureşti.
30. **Contrea A.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Asistent pe lângă catedra de Mineralogie şi Petrografie.
31. **Costăchescu D. C.** Sub-Lt de Marină, Constanţa.
32. **Cristescu I.** Inginer, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
33. **Cristodulo N.** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie.
34. **Cserveny I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Centrale Electrice.
35. **Demetrescu Gh.** Doctor în Matematematici, Prof la Universitatea din Cluj.
36. **Diaconescu N.** Profesor, Lic. din Slatina.
37. **Dimitriu-Dada** Profesor lic. Craiova.
38. **Florescu M.** Inginer Inspector Silvic, str. A. Orescu 9, Bucureşti.
39. **Frătici I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Cazane, Şc. Politechnică Timişoara.
40. **Georgescu D.** Profesor la Liceul din Piteşti, str. Negru-Vodă 14, Piteşti.
41. **Ghermănescu M.** Profesor la Liceul Cantemir, str. Făinari 64, Bucureşti.
42. **Hristea H.** Inginer la dep. C. F. R.
43. **Iorgulescu T.** Licenţiat în Ştiinţe, Asistent pe lângă catedra de Geologie.
44. **Lambrino Gh.** Doctor în Drept şi Economie Politică, Conferenţiar de Economie Politică şi Legislaţie Industrială.
45. **Laţiu V.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor de Geologia Zăcămintelor.
46. **Leonida D.** Inginer, Prof. la Şc. Politechnică, str. Sălcii 11, Bucureşti.
47. **Linteş I.** Căpitan de Artilerie, str. Epicol 49, Bucureşti.
48. **Liteanu Gh.** Lt. Col. în Artilerie, Alea Sevastopol 27, Bucureşti.
49. **Lupan A.** Inginer, Director la Reşiţa, Prof. la Şc Politechnică str. Povernei 3, Bucureşti.
50. **Magheru I.** Doctor în Ştiinţe, Prof. la Şc. Politechnică, Timişoara.

51. **Manughevici C.** Inginer-chimist, şef de Lucrări la Şc. Politechnică, str. Paul Chinezul 7, Timişoara.
52. **Mardan D.** Inginer-şef, directorul Fabricei de tutun. Prof. la Şc. Politechnică din Timişoara.
53. **Mateescu Ş.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor şi Decan de Mineralogie şi Petrografie.
54. **Mihaiu Emil** Profesor Şc. Comercială Timişoara şi Actuar Matematici, Diplomat.
55. **Miloia I.** Doctor în Litere şi Istoria Artelor, Asistent pe lângă catedra de Geometrie Discriptivă.
56. **Mioc V.** Profesor la Liceul Diaconovici-Loga, Timişoara şi Asistent la catedra de Analiză, la Şc. Politechnică, Timişoara.
57. **Nadaşan St.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Rezistenţa Materialelor.
58. **Naneş Gh.** Profesor la Lic. **Sf.** Sava, Bucureşti.
59. **Nichifor Gh.** Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti, str. Racoviţă 32, Bucureşti.
60. **Nicolau A.** Inginer, Prof. la Şc. Politechnică, Uzină Electrică, Craiova.
61. **Nicolau P.** Inginer, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
62. **Onicescu O.** Profesor, Universitar. Clopotarii-vechi 25, Bucureşti.
63. **Orăşeanu C.** Inginer-şef, Licenţiat în Matematici, Prof. la Sc. Politechnică, Bucureşti.
64. **Orăşeanu Gr.** Profesor la Liceul Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti.
65. **Petrescu A.** Doctor în Matematici, Directorul Academie Agricole, Cluj.
66. **Popescu E.** Doctor în Chimie dela Sorbona. Profesor la Şc Politechnică, Bucureşti.
67. **Popescu I.** Inginer, Profeşor de Maşini Miniere.
68. **Protopopescu I.** Inginer-şef, Prof. la Şc. Politechnică, din Timişoara.
69. **Purcariu I.** Director General, Ministerul de Instrucţie Publică, Bucureşti.
70. **Racliş N. R.** Conferenţiar la Şc. Politechnică din Bucureşti.
71. **Roibănescu C.** Profesor, Bucureşti.
72. **Saegiu E.** Inginer-şef, Serv. Constr. C.F.R. str. Berzei 70, Bucureşti.
73. **Săuciuc L.** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie.
74. **Schileru I.** Inginer, Conferenţiar de Electrotechnică şi Aplicaţiile Electricităţii în Mine, Directorul Şc. P. T. T. din Timişoara.
75. **Sergescu P.** Doctor în Matematici, Licenţiat în Filozofie, Prof. la Universitatea din Cluj.
76. **Severineanu C.** Inginer-şef, Subdirectorul Serviciul tracţiunei C. F. R., Prof. la Şc. Politechnică, Timişoara.
77. **Smighelschi O.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Electrotechnică.
78. **Stambuleanu A.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Termodinamică şi Fizică Industrială.
79. **Stăncescu C.** Doctor-Inginer, Prof. şi Decan la Şc. Politechnică Timişoara.
80. **Stantzel E.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Construcţii.
81. **Ştefănescu O.** Inginer, Asistent pe iângă catedra de Maşini Miniere şi Topografie.
82. **Stoicescu L.** Inginer, Conferenţiar la Elemente de Maşini şi Cursul General de Maşini.
83. **Stoicescu M.** Profesor str. Zefirului 4, Bucureşti.
84. **Teodorescu C.** Inginer-şef, Profesor la Şc. Politechnică, Direct. Uzinele Reşita.
85. **Teodosiu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Academia de Agricultură Cluj.
86. **Ţino O.** Doctor în Matematici, Prof. Şc. Politechnică, Timişoara.
87. **Vâlcovici V.** Doctor în Matematici, Prof la Universitatea din Bucureşti, str. Ştefan 26.
88. **Vlad I. V.** Inginer-arhitect, Profesor la Şc. Politechnică, str. Traian Lalescu 1, Timişoara.
89. **Zăgănescu I.** Inginer, Conferenţiar de Calculul Grafic şi Vectorial.
90. **Zapan Gr.** Căpitan-inginer din Flotila aviaţiei de Gardă, Cluj.

ANUL XII — NO. 1 TIMISOARA, 15 MARTIE 1932

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

PROPRIETĂȚI IN LEGATURĂ CU ANTICENTRUL PATRULATERELOR INSCRIPTIBILE

de SUB.-LOCOT. IOAN GH. ZAMFIRESCU

Ca o introducere în chestiune dau nota inginerului *V. Cristescu* din G. M. an. XXXI p. 312 cu ocazia rezolvării problemei 3375.

Dăm aci după *I. Neuberg* (Sur l'anticentre d'un quadrilater inscrit, Mathesis 1924 p. 314 și 1925 p. 193 și 373) proprietățile anticentrului:

Dreptele lui *Simson* ale vârfurilor unui patrulater inscriptibil în raport cu triunghiurile formate prin unirea vârfurilor rămase ale patrulaterului, concură în anticentru.

Fie $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu$ mijloacele laturilor și diagonalelor AB, BC, CD, DA, AC, BD, G mijlocul dreptei $\mu\nu$, iar λ intersecția celor două diagonale AC, BD.

Anticentrul aparține cercurilor celor nouă puncte ale triunghiurilor BCD, CDA, DAB, ABC. El este simetricul centrului O în raport cu punctul G.

Anticentrul este ortocentrul triunghiului $\lambda\mu\nu$.

Axele radicale ale celor trei perechi de cercuri (α, γ), (β, δ), (μ, ν) cari au ca diametru două laturi opuse sau cele două diagonale ale patrulaterului ABCD, trec prin anticentru.

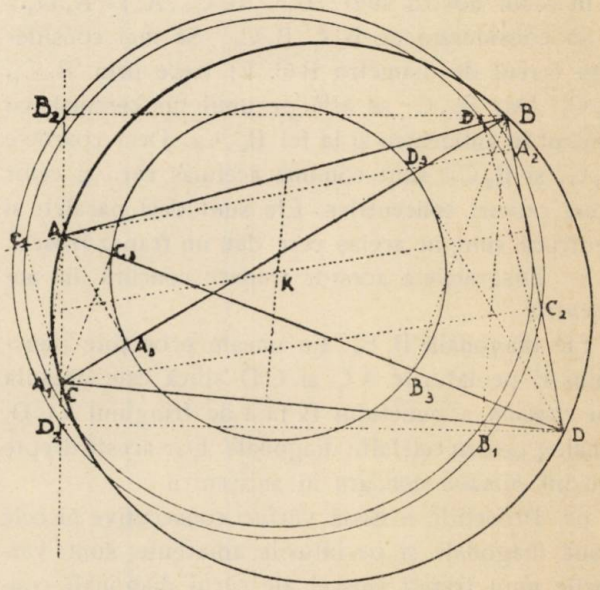
Perpendicularele duse din mijlocul fiecărei laturi a patrulaterului (sau a unei diagonale) pe latura opusă (sau pe cealaltă diagonală) trec prin anticentru.

Proecțiunile vârfurilor A, B, C, D, pe diagonalele opuse formează un patrulater asemenea cu ABCD, inscris într'un cerc cu centrul în anticentru.

Patrulaterele ABCD și $H_a H_b H_c H_d$ sunt egale și simetrice în raport cu anticentrul.

Pentru anticentru s'au propus și alte denumiri precum: centrul lui *Wallace*, punctul lui *Lemoine*, punctul lui *Mothot*.

1°. Proecțiile reciproce ale laturilor unui patrulater inscriptibil sunt conciclice, patru câte patru. (Fig. 1).



Fie patrulaterul ABCD și fie A_1, B_1, C_1, D_1 proecțiile reciproce ale laturilor AB și CD și A_2, B_2, C_2, D_2 ale laturilor AC, BD.

In patrulaterul $A_1 B_1 C_1 D_1$ avem:

$A_1 C_1$ antiparalelă la AC față de unghiul dreptelor AB, CD și deci paralelă la BD. Analog $B_1 D_1$ paralelă cu AC față de același unghiu. Rezultă că $A_1 C_1$ și $B_1 D_1$ sunt antiparalele față de același unghiu adică $A_1 B_1 C_1 D_1$ este inscriptibil. Analog pentru $A_2 B_2 C_2 D_2$.

2°. Proecțiile diagonalelor reciproc sunt deasemenea conciclice. Proprietatea e cunoscută dar o reamintesc pentru înlănțuirea ce mi-am propus. Ca demonstrație se observă că $A_3 C_3$ e antiparalelă cu AC și deci paralelă cu BD și analog $B_3 D_3$

paralelă cu BD față de unghiul diagonalelor. Fiind paralele cu două antiparalele sunt antiparalele față de același unghiu.

3°. Cele trei cercuri astfel găsite au același centru, anticentrul patrulaterului ABCD.

Fie patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$. Perpendiculara pe mijlocul lui A_1B_1 fiind paralelă cu AA_1 și BB_1 va trece prin mijlocul laturei AB și poate fi deci privită ca perpendiculara din mijlocul laturei AB pe latura CD. Ori se știe că toate dreptele analoage acesteia concură în anticentru, iar centrul cercurilor noastre e intersecția lor.

4°. Proecțiile extremităților diagonalelor pe laturi sunt vârfurile a două trapeze isoscele.

In cazul nostru sunt: $B_1C_1B_2C_2$; $A_1D_1A_2D_2$.

Să considerăm pe $B_1C_1B_2C_2$. Să mai considerăm cercul de diametru BC. El trece prin B_1C_1, B_2C_2. Dar B_1, C_1 se află pe unul din cercurile cu centrul în anticentru și la fel B_2, C_2. Deci coardele B_1C_1 și B_2C_2 sunt comune aceluiaș cerc și celor două cercuri concentrice. Ele sunt deci paralele și pentrucă sunt în același cerc dau un trapez isoscel.

5°. Diagonalele acestor trapeze concură în anticentru.

Fie diagonală B_1B_2. Ea unește proecțiile punctului B pe laturile AC și CD adică este dreapta lui *Simson* a punctului B față de tringhiul ACD. Analog pentru celelalte diagonale. Dar aceste drepte ale lui *Simson* concura în anticentru.

6°. Proecțiile a două vârfuri consecutive pe cele două diagonale și pe laturile adiacente sunt vârfurile unui trapez isoscel ale cărui diagonale concură tot în anticentru.

Sunt patru trapeze: $A_1C_1A_3C_3$; $B_1D_1B_3D_3$; $A_2B_2A_3B_3$; $C_2D_2C_3D_3$.

Să considerăm pe $A_2B_2A_3B_3$. Este înscris în cercul de diametru AB și tae cercul $A_2B_2C_2D_2$ după A_2D_2, iar cercul $A_3B_3C_3D_3$ după A_3B_3. Cum aceste două cercuri sunt concentrice, intersecțiile lor cu un al treilea cerc oarecare, vor fi extremitățile, a două coarde paralele, ce vor forma un trapez isoscel. Analog pentru celelalte. Diagonala B_2B_3 e dreapta lui *Simson* a lui B față de ADC și deci trece prin anticentru.

7°. Grupele de puncte:

a) (AB, CD), (A_3B_3, C_3D_3), (BB_2, CC_2), (AA_2, DD_2), (BB_3, DD_3), (CC_3, AA_3)

b) (AC, BD), (A_3C_3, B_3D_3), (CC_1BB_1), (AA_1, DD_1), (DD_3, CC_3), (AA_3, BB_3)

c) (AD, BC), (AA_1, CC_1), (AA_2, BB_2), (BB_1, DD_1), (DD_2, CC_2) sunt pe trei drepte perpendiculare pe dreptele ce unesc mijloacele laturilor și diagonalelor și cari conțin anticentrul.

Fie cercurile de diametre AB și CD al căror ax radical se știe că trece prin anticentru. Ele se tae cu cercul ABCD după AB și CD. Acestea sunt axele radicale. Intersecția lor e centrul radical al celor trei cercuri, iar axul primelor două va trece printr'însul, va fi perpendicular pe dreapta mijloacelor laturilor AB, CD, dreapta centrelor și după cele spuse, trece prin anticentru.

Căutând axul radical al acestor două cercuri succesiv, cu ajutorul cercurilor $A_3B_3C_3D_3$, BCB_2C_2, ADA_2D_2, BDB_3D_3, ACA_3C_3, găsim colinearitatea celorlalte puncte din grupă cu axul radical al cercurilor de diametru AB, CD.

Analog pentru punctele din grupa *b* cari se află pe axul radical al cercurilor de diametru AC, BD.

Analog pentru punctele din grupa *c* cari se află pe axul radical al cercurilor de diametru AD și BC.

Consecințe. 8°. Intr'un triunghiu se duce o antiparalelă la una din laturi. Dreapta ortocentrelor celor două triunghiuri astfel formate, trece prin anticentrul patrulaterului rezultat și e împărțit în două părți egale de acesta. Este o consecință imediată a punctului precedent, grupa *c*.

9°. Cele 4 triunghiuri, rezultate dintr'un patrulater inscriptibil complectat au ortocentrele lor pe aceeaș dreaptă cu intersecția diagonalelor și anticentrul patrulaterului și fiind simetrice în raport cu acesta. Iarăș o consecință imediată.

10°. Intr'un triunghiu se duce o antiparalelă la una din laturi, variabilă. Locul anticentrului patrulaterului rezultat e o dreaptă. Ortocentrul triunghiului mic descrie diametrul vârfului comun. Ortocentrul triunghiului dat e fix. Anticentrul se va găsi pe mijloacele dreptelor ce unesc ortocentrul triunghiului dat cu puncte de pe diametru, deci descrie o dreaptă paralelă cu diametrul și omotetică cu acesta cu raportul de omotetie $^1/_2$ și cu centrul de omotetie în ortocentrul fix.

11°. Dacă unul din vârfurile patrulaterului in-

scriptibil variază pe cercul circumscris, anticentrul descrie cercul lui *Euler* al triunghiului rămas fix. Ştiind că anticentrul aparţine cercurilor lui *Euler* ale triunghiurilor ce au ca vârfuri, vârfuri de ale patrulaterului, propoziţia rezultă imediat.

12°. Dacă una dintre laturile patrulaterului inscriptibil într'un cerc fix, variază paralel cu o direcţie, anticentrul descrie o perpendiculară pe această direcţie.

Anticentrul găsindu-se pe perpendiculara dusă din mijlocul laturei opuse celei variabile pe această, cum direcţia acesteia e fixă, şi perpendiculara va fi fixă, constituind locul anticentrului.

13°. Dacă una din diagonale variază paralel cu ea însăşi în patrulaterul inscriptibil într'un cerc fix, anticentrul descrie o perpendiculară pe această direcţie dusă prin mijlocul diagonalei fixe.

Demonstraţia analoagă precedentei.

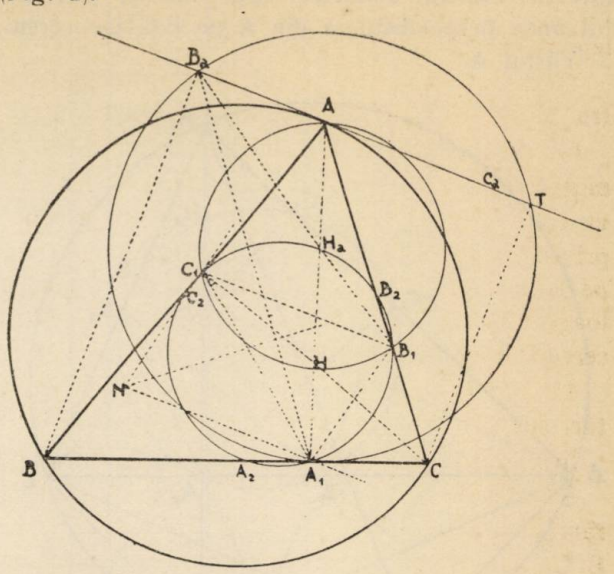
14°. Dacă una din diagonalele unui patrulater inscris într'un cerc fix, împreună cu intersecţia sa cu cealaltă, sunt fixe, anticentrul descrie un cerc.

Anticentrul este ortocentrul triunghiului de vârfuri, mijloacele şi intersecţia diagonalelor care triunghiu este înscris în cercul fix, de diametru, distanţa dintre centrul cercului circumscris şi intersecţia diagonalelor şi căruia îi variază un vârf, mijlocul diagonalei variabile. In acest caz însă se ştie că anticentrul descrie cercul lui *Carnot* al triunghiului în raport cu latura fixă.

15°. In cazul când triunghiul oarecare ABC e considerat ca provenind dintr'un patrulater căruia una din laturi i s'a transformat în tangenta în vârful dublu, anticentrul său este ortocentrul triunghiului care are ca vârfuri, vârful dublu şi mijloacele laturilor adiancente. Cele două laturi opuse ale patrulaterului se confundă cu diagonalele, iar cercurile lor se confundă deasemenea într'unul singur.

16°. Fie în acest caz triunghiul ABC, AT tangenta în A la cercul circumscris, A_1, B_1, C_1 picioarele înălţimilor, $B_a C_a$ proecţiile lui B şi C pe AT, A_2, B_2, C_2 mijloacele laturilor, H ortocentrul iar H_a ortocentrul triunghiului de vârfuri, vârful A şi mijloacele laturilor adiacente, care mai e şi mijlocul lui AH. Cercul $A_1 B_a C_a$ şi cercul $AB_1 C_1$ sunt concentrice cu centrul în H_a iar primul e tangent la BC.

Avem încă două perechi de cercuri analoage. (Fig. 2).



17°. Centrul radical al cercurilor $AB_1 C_1$ şi analoagelor sale, e ortocentrul. Lucrul e evident, căci ortocentrul le aparţine.

18°. Centrul radical al cercurilor $A_1 B_a C_a$ şi analoagelor lor este invers omoteticul ortocentrului faţă de centrul de greutate al triunghiului ortic, în raportul $^2/_1$.

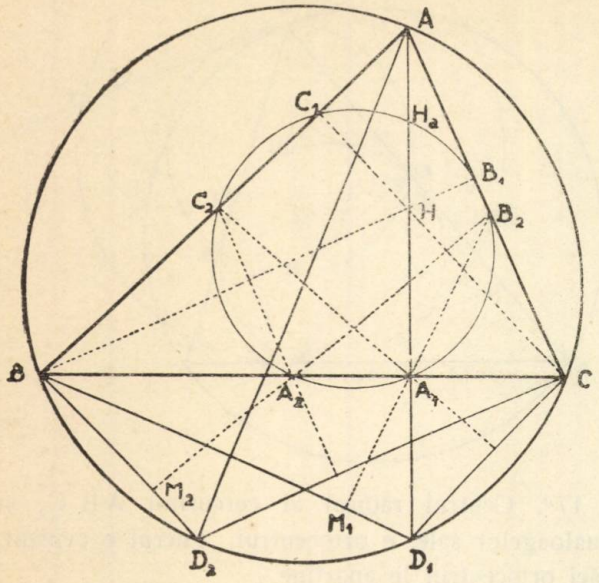
Axul radical al cercului $A_1 B_a C_a$ cu cercul lui *Euler* e paralela dusă din A_1 (comun ambelor) la $B_1 C_1$ (perpendiculara pe $H_a O_9$ dreapta centrelor). Analog se găseşte că axul radical al cercului lui *Euler* şi $C_1 A_c B_c$ e paralela dusă prin C_1 la $A_1 B_1$. Fie N intersecţia acestor două axe. Axul radical al cercurilor $A_1 B_a C_a$ şi $C_1 A_c B_c$ e perpendiculara din N pe $H_a H_c$, paralelă cu $B_1 H$ adică bisectoarea unghiului $A_1 N C_1$. Se deduce că centrul radical e centrul cercului înscris într'un triunghiu, anticomplementarul triunghiului ortic şi invers omotetic cu acesta faţă de centrul său de greutate în raportul $^2/_1$.

19°. Dreapta $B_a B_1$ trece prin H_a. Avem trei drepte analoage. Demonstraţia este imediată, dacă ţinem seamă că $B_a B_1$ e diagonala patrulaterului $AB_a A_1 B_1$ care e un trapez isoscel din patrulaterul iniţial, degenerat într'un triunghiu.

20°. Dau acum o demonstraţie a cercului lui *Euler* în legătură cu anticentrul. (Fig. 3).

In patrulaterul $ABCD$ consider vârful D mobil

pe cercul circumscris şi trei poziţii particulare ale sale: 1) Punctul diametral opus lui A, 2) Punctul unde perpendiculara din A pe BC tae cercul, 3) Vârful A.



Anticentrul se află la intersecţia perpendicularelor din mijloacele B_2, C_2, ale dreptelor AC şi AB pe CD şi BD, fie I. Unghiul format de aceste perpendiculare e suplimentar unghiului D şi deci egal cu A. Cum B_2C_2 e fix, locul anticentrului, pentru că din el B_2C_2 se vede sub unghiul constant A, este un cerc. Se ştie că acest cerc este cercul lui *Carnot* al triunghiului AB_2C_2 faţă de latura B_2C_2.

Fie poziţia 1 a lui D. Avem: $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 90^0$; $B_2I \parallel AB \perp BD$ şi deci trece prin A_2. $C_2I \parallel AC \perp CD$ şi deci trece prin A_2. Rezultă că locul lui I trece prin A_2.

Fie poziţia 2 a lui D. Avem: $\sphericalangle MA_1B = 90^0 - \sphericalangle DBC = 90^0 - \sphericalangle CAA_1 = \sphericalangle ACA_1 = \sphericalangle CA_1B_2$ (triunghiul B_2A_1C fiind isoscel, dacă AA_1C e dreptunghic) adică B_2A_1M e o dreaptă, dusă din B_2 perpendiculară pe BD. Analog pentru C_2A_1. Deci anticentrul a venit în A_1 adică locul trece prin piciorul perpendicularei din A.

Fie poziţia 3ª. In acest caz am văzut că anticentrul vine în H_a.

Considerând succesiv pe AB şi AC ca diagonale, găsim că anticentrul trece prin celelalte 6 puncte analoage ale triunghiului ABC.

NOTE MATEMATICE

1. — *Exprimarea elementelor unui triunghiu, în funcţie de razele cercurilor exînscrise.*

Voiu demonstra întâi relaţia:

$$(\alpha) \qquad p^2 = \Sigma r_a r_b$$

unde p, e semiperimetrul triunghilui, iar $r_a r_b, r_c$, razele cercurilor exînscrise.

Se ştie că:

$$(1) \qquad r_a = p \operatorname{tg}\frac{A}{2},\ r_b = p \operatorname{tg}\frac{B}{2},\ r_c = p\operatorname{tg}\frac{C}{2} \text{ şi}$$

$$(2) \qquad r = p \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Inmulţind relaţiile (1), membru cu membru şi ţinând seamă de (2), obţinem:

$$(3) \qquad r_a r_b r_c = p^2 r$$

Se ştie apoi că:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c},$$

care relaţie, se mai poate scrie:

$$\frac{1}{r} = \frac{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c}{r_a r_b r_c}$$

Ţinând seamă de relaţia (3) şi simplificând cu $\frac{1}{r}$, obţinem:

$$\frac{1}{r} = \frac{r_a r_b + \cdots r_b r_c,}{p^2 r}, \text{ deci}$$

$$(\alpha) \qquad p^2 = r_a r_b + \cdots r_b r_c$$

Din relaţiile (1], deducem:

$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r_a}{p}$ şi dacă ţinem seama de (α), avem:

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r_a}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}};\ \ldots \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r_c}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}$$

Din relaţiile cunoscute:

$$\frac{a}{\sin A} = \cdots \frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}, \text{ obţinem:}$$

$$a = \frac{p \sin A}{2 \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{2p \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2 \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

deci:

$$(6) \qquad a = \frac{\sqrt{\Sigma r_a r_b}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

Cu ajutorul relațiilor (5), ținând seamă de formulele

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}}; \quad \cos\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}} \cdots,$$

obținem îndată:

$$(\beta) \qquad \sin\frac{A}{2} = \frac{r_a}{\sqrt{r_a^2 + \Sigma r_a r_b}}; \quad \cos\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}{\sqrt{r_b^2 + \Sigma r_a r_b}}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}{\sqrt{r_c^2 + \Sigma r_a r_b}},$$

cari valori înlocuite în (6), ne dau:

$$(7) \qquad \begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{(r_b^2 + \Sigma r_a r_b)(r_c^2 + \Sigma r_a r_b) r_a^2}{(r_a^2 + \Sigma r_a r_b)\sqrt{\Sigma r_a r_b}}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c = \sqrt{\dfrac{(r_a^2 + \Sigma r_a r_b)(r_b^2 + \Sigma r_a r_b) r_c^2}{(r_c^2 + \Sigma r_a r_b)\sqrt{\Sigma r_a r_b}}} \end{cases}$$

Din relația:

$s = p\,r$, obținem știind că:

$$r = \frac{r_a r_b r_c}{\Sigma r_a r_b},$$

$$(7) \qquad s = \frac{r_a r_b r_c}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}$$

Se știe că:

$$(8) \qquad R = \frac{p}{4 \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

Ținând seamă de relațiile (β), obținem:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} =$$

$$= \frac{(\Sigma r_a r_b)^{3/2}}{\sqrt{(r_a^2 + \Sigma r_a r_b)(r_b^2 + \Sigma r_a r_b)(r_c^2 + \Sigma r_a r_b)}}$$

Inlocuind în (8), aceasta, și ținând seamă de relația:

$$p = \sqrt{\Sigma r_a r_b} = (\Sigma r_a r_b)^{1/2},$$

obținem raza cercului circumscris:

$$R = \frac{\sqrt{(r_a^2 + \Sigma r_a r_b)(r_b^2 + \Sigma r_a r_b)(r_c^2 + \Sigma r_a r_c)}}{\Sigma r_a r_b}$$

ION MARGINEANU

2. — *Câteva relații în legătură cu cercurile tritangente.*

Fie A B C ca triunghiu de referință, I, I_a, I_b, I_c centrele cercurilor tritangente. Se pot calcula distanțele dintre punctele figurii, folosind proprietatea remarcabilă că A B C este triunghiul ortic al lui $I_a I_b I_c$, de ortocentru I.

Cercul (O) circumscris triunghiului A B C, este triunghiul *Euler* al lui $I_a I_b I_c$, deci R' fiind raza cercului circumscris triunghiului tritangentelor, avem $R' = 2R$.

Intre unghiurile triunghiurilor A B C și $I_a I_b I_c$, avem: $\sphericalangle I_a = \sphericalangle 1\,B\,C + \sphericalangle 1\,C\,B = 90^0 - \frac{A}{2}$

***

Putem deci scrie:

$$\overline{A I_a} = 2R' \sin I_b \sin I_c = 4R \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\overline{A I} = 2R' \cos I_b \cos I_c = 4R \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\overline{A I_b} = 2R' \sin I_c \cos I_b = 4R \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\overline{A I_c} = 2R' \sin I_b \cos I_c = 4R \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\overline{I I_a} = 2R' \cos I_a = 4R \sin\frac{A}{2}$$

$$\overline{I_b I_c} = 2R' \cos I_a = 4R \cos\frac{A}{2}$$

. . . . . .

2. $\overline{O I} = R'\sqrt{1 - 8 \cos I_a \cos I_b \cos I_c}$

*** $\overline{O I} = R\sqrt{1 - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

Şi acum, o verificare:

Ţinând seamă de relaţiile date în R. M. T. An IX, Nota 3, pag. 7, de D-l *Cezar Coşniţă:*

$$\overline{A I_a} = \sqrt{(r_a + r_b)(r_a + r_c)} \ldots\ldots$$

$$\overline{A I} = \frac{r}{r_a}\sqrt{(r_a + r_b)(r_a + r_c)} \ldots\ldots$$

$$\overline{A I_b} = \frac{r_b}{p}\sqrt{(r_a + r_b)(r_a + r_c)} \ldots\ldots$$

$$\overline{A I_c} = \frac{r_c}{p}\sqrt{(r_a + r_b)(r_a + r_c)} \ldots\ldots$$

$$\overline{I I_a} = \frac{r_a}{p}\sqrt{(r_b + r_c)(r_a + r_b + r_c - r)} \ldots\ldots$$

$$\overline{I_b I_c} = \sqrt{(r_b + r_c)(r_a + r_b + r_c - r)} \ldots,$$

Putem stabili relaţiile:

$$\sqrt{(r_a + r_b)(r_a + r_c)} = 4R\frac{r_a}{r}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} =$$

$$\frac{4pR}{r_b}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{4pR}{r_c}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2} =$$

$$4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

$$\sqrt{(r_b + r_c)(r_a + r_b + r_c - r)} = \frac{4pR}{r_c}\sin\frac{A}{2} =$$

$$4R\cos\frac{A}{2}$$

care se verifică imediat, ţinând seamă că:

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\quad r_a = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$r_b + r_c = 4R\cos^2\frac{A}{2},$$

$$r_a - r = 4R\sin^2\frac{A}{2},\quad r_a + r_b + r_c - r = 4R,$$

$$\frac{r_a}{r} = \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2},\quad \frac{p}{r_a}\operatorname{cotg}\frac{A}{2} \ldots\ldots$$

N. N. MIHAILEANU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematica*, anul XXXVII, No. 6, Februarie 1932. Asupra limitării rădăcinelor unei clase de ecuaţii algebrice, de *N. Ciorănescu*. Soluţiuni întregi ale ecuaţiei $\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk}x_h x_k = 0$, de *Gh. Constantinescu*.

2. *Boletin Matematico*, anul IV, Ianuarie 1932. O scurtă privire asupra istoricului semnelor algebrice, de (†) *Tr. Dordea*. (Din „R. M. T." an. XI. No. 2). Provenienţa buletinului matematico, de *B. I. Baidaf*.

3. *Boletin Matematico elemental*, N-rile 10, 11. Concursul buletinului matematic elemental. Teorema lui *Menelao*.

4. *Revista Brasileira*, Anul III, No. 4, Decembrie 1931. *I. L. Lagrange*, de *Maurice d'Ocagne*. Ştiinţă şi Artă, de *Agliberto Xavier*. Incercarea unei teorii concrete a numerilor relative, de *S. Sodré da Gama*. Despre caracterele de divizibilitate, de *E Chagas de Oliveira*. Un nou mod de extragerea rădăcinei patrate, de *Abilio Alencar*. Asupra teoremei lui *Fay*, de *O Vieira de Campos*.

5. *Nicolae Abramesco*. Le mouvement d'une figure plane variable qui reste semblable à elle même. (Extras din „Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa".

6. *Radu Bădescu*. Sur le troisième théorème de *Fredholm* relatif à une équation integrale particuliére. (Extras din Matematica, vol. VI).

7. *I. Kelemen*, professeur au lycée d'Oradea. Introduction à la Géometrie Euclidienne du monde à 4 dimensions.

8. *A. Toussaint*, ingénieur — inspecteur — général. Réflexions mathématiques: (lucrare litografiată).

PROBLEME REZOLVATE

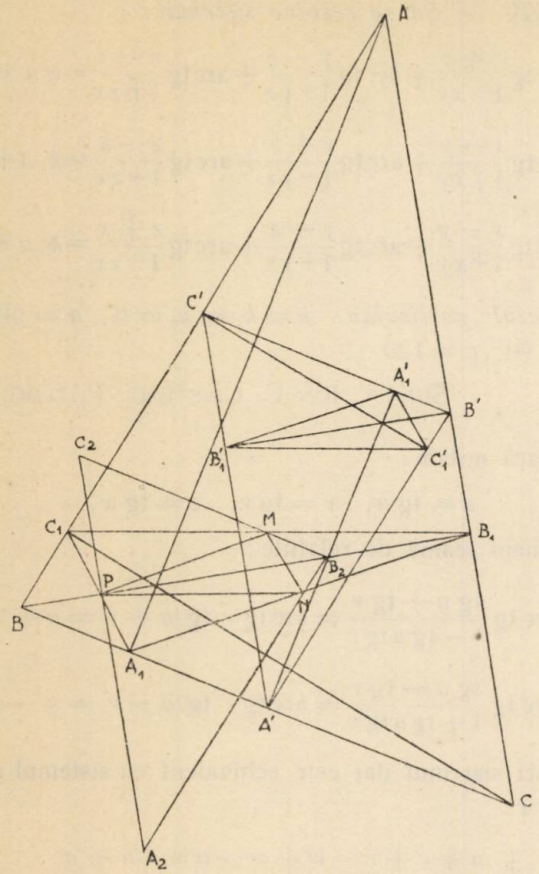
514. — *Se dă un triunghiu* ABC *şi* $A_1B_1C_1$ *triunghiul său ortic. Triunghiul format de paralele duse prin mijloacele laturilor* A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, *respectiv la* AB, BC, CA *este egal cu complimentarul lui* ABC.

CONSTANTIN IONESCU BUJOR

Fie ABC triunghiul dat, $A_1B_1C_1$ triunghiul său ortic, $A'B'C'$ triunghiul său complimentar şi MNP triunghiul complimentar al triunghiului ortic $A_1B_1C_1$. Fiindcă triunghiul $A'BC'$ are laturile paralele respectiv cu laturile triunghiului ABC şi egale cu jumătatea lor, rezultă că triunghiul său ortic $A'_1B'_1C'_1$ are laturile sale paralele respectiv cu laturile lui $A_1B_1C_1$ şi egale cu jumătatea lor, deci paralele şi egale respectiv cu ale triunghiului MNP complimentar lui $A_1B_1C_1$. Triunghiurile $A'_1B'_1C'_1$ şi MNP sunt egale, având şi laturile paralele.

Ducem acum prin M, N, P paralele respectiv la laturile triunghiului ABC şi fie $A_2B_2C_2$ triunghiul format de aceste paralele.

Observăm acum uşor că triunghiurile $A_1' C' B_1'$ şi $M C_2 P$ sunt egale având $M P = A_1' B_1'$ şi unghiurile alăturate acestor laturi respectiv egale, ca



fiind formate de laturi paralele şi de acelaşi sens. Analog, triunghiul $B' A_1' C_1'$ şi $B_2 M N$, sunt egale şi tot astfel triunghiurile $A' B_1' C_1'$ şi $A_2 N P$ sunt egale.

Conchidem de aci că triunghiurile $A' B' C'$ şi $A_2 B_2 C_2$ sunt egale.

Soluţii date de d-nii: *Manolescu I. N.* (lic. Focşani), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Stan I. Aurelian* (lic. Militar, Iaşi), *Stan C.* (lic. Roman), *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti), *Vasiliu Gh. Gh.* şi *Winkler Alfred* (Seminarul Pedagogic, Iaşi).

518. — *Să se găsească numerile de patru cifre ale căror patrate perfecte se termină cu de trei ori numărul însuşi.*

GH CONSTANTINESCU

Fie N un număr de patru cifre. Din cuprinsul enunţului deducem:

$N^2 - 3N = K \times 10^4$ sau $N^2 - 3N = K_1 \times 10^5$,

(K şi K_1 întregi), sau:

(1) $N(N-3) = K \times 10^4$ sau (2) $N(N-3) = K_1 \times 10^5$

Din (1) deducem condiţiile simultane:

$$(1') \quad \begin{cases} N = \text{mult. } 2^4 = \text{mult. } 16 \\ N - 3 = \text{mult. } 5^4 = \text{mult. } 625 \end{cases}$$

$$(1'') \quad \begin{cases} N = \text{mult. } 16 + 3 \\ N = \text{mult. } 625 \end{cases}$$

Din (1') şi (1) rezultă că trebuie să luăm pentru N numere care sunt mult. $625 + 3$, în care 3 N are patru cifre şi care să fie divizibile prin 16.

Numere de forma mult. $625 + 3$, cu 3 N de patru cifre sunt: 1878 şi 3128, dar nici unul nu este devizibil prin 16, deci n'avem soluţie în acest caz.

Trecem la condiţiile (1''). Ele ne spun că trebuie să luăm pentru N multipli impari de 625, care sunt în acelaşi timp şi mult. $16 + 3$, 3 N fiind de patru cifre. Multiplii impari de patru cifre de 625, cu 3 N de patru cifre sunt: 1875 şi 3125, dintre cari 1875 este şi mult. $16 + 3$, deci ne dă o soluţie a problemei.

Vom lua în cercetare condiţia (2); ea este echivalentă cu condiţiile simultane:

$$(2') \quad \begin{cases} N = \text{mult. } 2^5 = \text{mult. } 32 \\ N = \text{mult. } 5^5 = \text{mult. } 3125 + 3 \end{cases}$$

$$(2'') \quad \begin{cases} N = \text{mult. } 32 + 3 \\ N = \text{mult. } 3125. \end{cases}$$

Să satisfacem condiţiile (2'). Numerile de patru cifre de forma, mult. $3125 + 3$, cu 3 N de cinci cifre sunt: 6253 şi 9378, dintre care nici unul nu este multiplu de 32, deci n'avem soluţie în acest caz.

Trecem în fine la condiţiile (2''). Numerile de patru cifre de forma mult. 3125, cu 3 N de cinci cifre sunt: 6250 şi 9375, dintre care nici unul nu este mult. $32 + 3$, deci nu avem soluţie.

Singura soluţie a problemei este astfel numai numărul 1875.

Soluţii date de d-nii: *Albeaţă N. Ermil* (lic. P.-Neamţ), *Marius Mariş* (lic. Arad), *Novac Valeriu* (lic. Arad), *Podariu Al.* (lic. P.-Neamţ), *Scripcă Mihai* (Semin. Pedagogic, Iaşi) şi *Winkler Alfred* (Seminarul Pedagogic, Iaşi).

1013. — *Să se găsească un număr de patru cifre astfel că mărit cu 1 este divizibili prin 21 şi mărit cu 6 e divizibil prin 11. Suma cifrelor lui este 14.*

V. ALACI

Fie N un număr de patru cifre. Conform enunţului, avem:

$$(1)\qquad \begin{cases} N+1=21x \\ N+6=11y \end{cases}$$

Să rezolvăm în numere întregi acest sistem şi în urmă vom alege dintre numerile N de patru cifre astfel obţinute, pe acelea în care suma cifrelor este 14.

Din (1) rezultă:

$$21x-1=11y-6,$$

de unde deducem:

$$y=2x-\frac{x-5}{11}$$

Pentru a avea y întreg, trebuie să luăm:

$$(2)\qquad x=11t+5,$$

şi atunci:

$$y=21t+10$$

Ţinând seamă de (2) din, (1) deducem:

$$N=231t+104$$

Cum N este de 4 cifre, rezultă:

$$1000\leqq 231t+104\leqq 9999,$$

$$**\qquad 4\leqq t\leqq 42$$

Cum suma cifrelor lui N, adică a lui $231t+104$ este 14, găsim că pentru t trebuie să luăm:

$$t=6,9,18,27,30,36,39$$

corespunzând pentru N, numerile:

1490, 2183, 4262, 6341, 7034, 8420, 9113,

care costitue 7 soluţii pentru problemă.

Au găsit toate soluţiile, d-nii: *Breazu M. Mihail* (lic. Giurgiu), *Cristescu I.* (Sub-Lt de Artilerie), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Mihăileanu N. N.* (lic. Constanţa), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Pop I. Leontin* (Şc. Polit., Timişoara) *Popa B. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa D. Traian* (lic. Giurgiu), *Purdilă A.* şi *Weissmann Mauriciu* (lic. Constanţa). Au găsit mai puţine soluţii d-nii: *Boeriu Valer* (6 soluţii), *Cristalopol C. Ioan* (1 soluţie), *Grinberg N. Meer* (3 soluţii), *Manasiu N. D-tru* (1 soluţie), *Margulius Marius* (1 soluţie), *Mereuţă Emilian* (2 soluţii), *Motoc D. Mircea* (4 soluţii) şi *Nicolaescu Stelian* (1 soluţie).

1029. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y-z}{1+yz}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{z-x}{1+zx}=k\pi+a \\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-y}{1+xy}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y+z}{1-yz}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{z-x}{1+zx}=k_1\pi+b \\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-y}{1+xy}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y-z}{1+yz}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{z+x}{1-zx}=k_2\pi+c \end{cases}$$

Cazul particular: $k=k_1=k_2=0$, $a=60^0$, $b=90^0$, $c=120^0$.

SUB-LT. ION C. CRISTESCU-POTLOGI

Dacă notăm:

$$(1)\qquad x=\operatorname{tg}u,\quad y=\operatorname{tg}v,\quad z=\operatorname{tg}w,$$

şi ţinem seamă de relaţiile:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}u+\operatorname{tg}v}{1-\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v}=\operatorname{arc\,tg}\cdot\operatorname{tg}(u+v)=u+v$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}u-\operatorname{tg}v}{1+\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v}=\operatorname{arc\,tg}\cdot\operatorname{tg}(u-v)=u-v,$$

atunci sistemul dat este echivalent cu sistemul următor:

$$\begin{cases} u+v+v-w+w-u=k\pi+a \\ u-v+v+w+w-u=k_1\pi+b \\ u-v+v+w+w+u=k_2\pi+c \end{cases}$$

De aci deducem imediat:

$$u=\frac{k\pi+c}{2},\quad v=\frac{k_1\pi+b}{2},\quad w=\frac{k_2\pi+c}{2}$$

Ţinând seamă de relaţiile (1), găsim următorul sistem de soluţii:

$$\begin{cases} x=\operatorname{tg}\dfrac{k\pi+c}{2} \\ y=\operatorname{tg}\dfrac{k_2\pi+b}{2} \\ z=\operatorname{tg}\dfrac{k_1\pi+a}{2} \end{cases}$$

In cazul particular dat, avem sistemul de soluţii:

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3} \\ y = \operatorname{tg} 30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ z = \operatorname{tg} 45^0 = 1 \end{cases}$$

Soluții date de d-nii: *Mihăileanu N. N.* (lic. Constanța), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Motoc D. Mircea* (lic. Oltenița), *Parepeanu C. Ioan* (bacalaureat), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conductori-Technici, Cluj), *Pop I. Leontin* (Șc. Polit., Timișoara) și *Purcel Atanasiu* (Șc. Polit., Timișoara).

Observare. D-l *Lupescu Gh. C-tin* a dat o soluție f. lungă.

1030. — *Să se stabilească următoarea formulă calculabilă prin logaritmi.*

$$\frac{\sin 3\alpha, + 2\sin(2\alpha_1+\alpha) + \sin(\alpha_1+2\alpha)}{\sin 3\alpha_1 + 3\sin(2\alpha_1+\alpha) + 3\sin(\alpha_1+2\alpha) + \sin 3\alpha} = \frac{\sin(\alpha+2\alpha_1)}{2\cos\dfrac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin\dfrac{3(\alpha+\alpha_1)}{2}}$$

Să se verifice pentru $\alpha_1 = 0$.

V. ALACI

Prima soluție. Observăm că putem scri succesiv:

(1) $$\sin 3\alpha_1 + 2\sin(2\alpha_1+\alpha) + \sin(\alpha_1+2\alpha) =$$
$$2\sin(2\alpha_1+\alpha)\cos(\alpha_1-\alpha) + 2\sin(2\alpha_1+\alpha) =$$
$$2\sin(2\alpha_1+\alpha)[\cos(\alpha_1-\alpha)+1] =$$
$$4\sin(2\alpha_1+\alpha)\cos^2\frac{\alpha-\alpha_1}{2}$$

(2) $$\sin 3\alpha_1 + 3\sin(2\alpha_1+\alpha) + 3\sin(\alpha_1+2\alpha) +$$
$$\sin 3\alpha = 2\sin\frac{3(\alpha+\alpha_1)}{2}\cos\frac{3(\alpha-\alpha_1)}{2} +$$
$$6\sin\frac{3(\alpha+\alpha_1)}{2}\cos\frac{\alpha-\alpha_1}{2} = 2\sin\frac{3(\alpha+\alpha_1)}{2}\times$$
$$\left[\cos\frac{3(\alpha-\alpha_1)}{2} + \cos\frac{\alpha-\alpha_1}{2} + 2\cos\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\right] =$$
$$2\sin\frac{3(\alpha+\alpha_1)}{2}\left[2\cos(\alpha-\alpha_1)\cos\frac{\alpha-\alpha_1}{2} + 2\cos\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\right] = 4\sin\frac{3(\alpha+\alpha_1)}{2}\cos\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\times$$
$$\left[2\cos(\alpha-\alpha_1)+1\right] = 8\sin\frac{3(\alpha+\alpha_1)}{2}\cos^3\frac{\alpha-\alpha_1}{2}$$

In virtutea relațiilor (1) și (2) putem scri:

$$\frac{\sin 3\alpha_1 + 2\sin(2\alpha_1+\alpha) + \sin(\alpha_1+2\alpha)}{\sin 3\alpha_1 + 3\sin(2\alpha_1+\alpha) + 3\sin(\alpha_1+2\alpha) + \sin 3\alpha} =$$
$$\frac{4\sin(\alpha+2\alpha_1)\cos^2\dfrac{\alpha-\alpha_1}{2}}{8\sin\dfrac{3(\alpha+\alpha_1)}{2}\cos^3\dfrac{\alpha-\alpha_1}{2}} =$$
$$\frac{\sin(\alpha+2\alpha_1)}{2\cos\dfrac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin\dfrac{3(\alpha+\alpha_1)}{2}},$$

care este tocmai formula cerută.

In cazul $\alpha_1 = 0$, formula din enunț devine:

(3) $$\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{3\sin\alpha + 3\sin 2\alpha + \sin 3\alpha} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$$

Dar:

(4) $$\frac{\sin\alpha}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{3\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin 2\alpha} = \frac{1}{1+2\cos\alpha}$$

Apoi:

(5) $$\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{3\sin\alpha + 3\sin 2\alpha + \sin 3\alpha} =$$
$$\frac{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{3\sin\alpha + 3\sin 2\alpha + 3\sin\alpha - 4\sin 3\alpha} =$$
$$\frac{1+\cos\alpha}{3+2\cos\alpha-2\sin^2\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{1+2\cos\alpha+2\cos^2\alpha} =$$
$$\frac{1}{1+2\cos\alpha}.$$

Din (4) și (5) se vede că este verificată relația (3).

Soluții date de d-nii: *Acikgheozian N.* (lic. Spiru-Haret, București), *Dăscălescu Șt. Hristache* (student, București), *Dumitrașcu N. Romeo* (bacalaureat, Roman), *Lupescu Gh. C-tin* (bacalaureat, Roman), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Mihăileanu N. N.* (lic. Constanța), *Popa B. Ioan*, *Rusu D. C-tin* (Constanța) și *Tica P. Marin* (bacalaureat).

Soluția 2-a. Dacă în identitatea:

$$\frac{n\sin n\alpha_1+(n-1)C_n^1\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]+\cdots+C_n^1\sin[\alpha_1+(n-1)\alpha]}{\sin n\alpha_1+C_n^1\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]+\cdots+\sin n\alpha}=\frac{n\sin\dfrac{(n-1)\alpha+(n+1)\alpha_1}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin\dfrac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}}$$

stabilită în „R. M. T." an XI. No. 7, pag. 76, facem $n=3$, obţinem după simplificarea prin 3:

$$\frac{\sin 3\alpha_1+2\sin(2\alpha_1+\alpha)+\sin(\alpha_1+2\alpha)}{\sin 3\alpha_1+3\sin(2\alpha_1+\alpha)+3\sin(\alpha_1+2\alpha)+\sin 3\alpha}=\frac{\sin(\alpha+2\alpha_1)}{2\cos\dfrac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin\dfrac{3(\alpha+\alpha_1)}{2}},$$

care este tocmai formula cerută.

Această soluţie care cuprinde generalizarea problemei propuse a fost dată de harnicii noştri corespondenţi: *Jeba C. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Motoc D. Mircea* (lic. Oltenita), care au cetit cu profit articolul menţionat.

PROBLEME PROPUSE

1079. — a fiind un număr de o cifră, se cere să se găsească numerile triunghiulare de forma $aaa\ldots aa$.

COL. GH BUICLIU

1080. — O progresiune aritmetică de 11 termeni, are suma termenilor de rangul 1, 3, 5, 7, 9, 11 egală cu 60; iar suma termenilor de rangul 1, 4, 7, 10 egală cu 34. Se cere acea progresie.

I. DUMITRIU-DADA

1081. — Să se facă raţional numitorul fracţiei:

$$\frac{1}{\sqrt[m]{x^p}\pm\sqrt[n]{y^q}}$$

ION MARGINEANU

1082. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=a\\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=b\end{cases}$$

TEODOR MARSIEU

1083. — Dacă A_1, B_1, C_1 sunt intersecţiile bisectoarelor triunghiului ABC cu cercul său circumscris şi A_2, B_2, C_2 punctele de contact ale laturilor cu cercul înscris, atunci dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt concurente.

AL NICOLAU

1084. — Se dă cercul O şi triunghiul fix ABC înscris în el. Din A se duce coarda variabilă AD în cercul O. Se cere locul geometric al centrului de greutate al triunghiului BCD, când AD variază.

V. ALACI

1085. — In paralelogramul $ABCD$ se proiectează unul din vârfurile sale B, pe diagonala AC în P şi pe laturile DA şi DC în M şi N.

1°. Să se găsească expresia ariei triunghiului PMN în funeţiune de BP şi de unghiul A al paralelogramului.

2°. Intre ce limite poate varia unghiul A, pentru ca unghiul P al triunghiului PMN să fie drept? La ce se reduce expresia ariei precedente, în cazul acesta.

AUGUST COMAN

1086. — Ştiind că $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$, să se stabilească identitatea:

$$\frac{(a^2+b^2)\sin 2x+2ab}{(a^2-b^2)\sin 2x-2ab\cos 2x}=\frac{\sin(x+\varphi)}{\sin(x-\varphi)}$$

CEZAR IVANESCU

1087. — Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relaţia:

$$\frac{b}{ac}\cot^2 B+\frac{c}{ab}\cot^2 C=\frac{a}{bc}-\frac{\cot A\cdot\cot B\cdot\cot C}{2R}$$

ROMEO N. DUMITRASCU

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și *J. Tschlek,* Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann,* La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale,* Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez,* Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell,* Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff,* Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera,* S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W Lewitzky,* Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler.* Washington (Statele Unite), *J. Shohat,* Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville,* Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault,* Le Mans (Francia), *O. Szász,* Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti,* Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu și-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Abonamentul pe anul XII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

Rugăm pe corespondenții noștri, a ne trimete din timp abonamentul pe anul XII, care începe cu acest număr. Prețul abonamentului este de 100 (una sută) lei.

ANUL XII. 15 APRILIE 1932 NO. 2.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. N. N MIHAILEANU CATEVA PROPRIETATI IN LEGATURA CU CERCURILE TRITANGENTE
2. NOTE MATEMATICE: 3, 4.
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 515, 1026, 1028 1031, 1032, 1034, 1038. 1039. 1041.
5. PROBLEME PROPUSE: 1088-1095.
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA

Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Avem plăcerea a anunța că începând cu luna Aprilie 1932, fac parte din Comitetul Revistei Matematice și D-nii:

1. **Miron Niculescu,** doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cernăuți, Str. Paris 14, București.
2. **Căpitan Gh. Niculescu,** inginer, Str. Izvor 98, București.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof C. Teodorescu,** Școala Politechnică din Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XI inclusiv, broșate, 120 lei fiecare.

ANUL XII — No 2. TIMISOARA, 15 APRILIE 1932.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

CÂTEVA PROPRIETĂȚI IN LEGĂTURĂ CU CERCURILE TRITANGENTE

de N. N. MIHAILEANU

Intre triunghiul fundamental și triunghiul tritangentelor — format de centrele cercurilor exînscrise — se pot stabili relații interesante, transformând proprietăți cunoscute între triunghiul de referință și triunghiul său ortic.

Fie în adevăr ABC triunghiul fundamental; I, I_a, I_b, I_c centrele cercurilor tritangente. ABC este triunghiul ortic al lui $I_a I_b I_c$ și I ortocentrul lui, căci laturile triunghiului $I_a I_b I_c$ sunt perpendiculare în vârfurile triunghiului ABC, pe bisectoarele lui interioare.

Metoda este bogată în proprietăți, dintre care vom arătă câteva :[1])

I. Cercul circumscris triunghiului ABC este cercul *Euler* al triunghiului $I_a I_b I_c$.

II. Centrele I, O, ω ale cercului înscris și circumscris triunghiului ABC și circumscris triunghiului $I_a I_b I_c$, sunt colineare și $IO = O\omega$.

III. A_1, B_1, C_1 fiind pricioarele bisectoarelor exterioare pe cercul circumscris triunghiului ABC, triunghiul $A_1 B_1 C_1$ este complimentarul triunghului $I_a I_b I_c$.

IV. $I_a A_1$, $I_b B_1$, $I_c C_1$ concură în M pe $I\omega$ și $IM = 2\omega M$.

V. $\omega, M, 0, I$ formează o diviziune armonică. [C. d. P. 15 VIII] [2])

VI. I'_a, I'_b, I'_c fiind diametral opuse centrelor cercurilor exînscrise, în cercul lor circumscris, $I'_a A_1$, $I'_b B_1$, $I'_c C_1$ concură în I. [C. d. P. 2 V.]

VII. Dreptele (AB_1, BA_1) ; (BC_1, CB_1) ; (CA_1, AC_1); se taie pe OI. [C. d. P. 32 XI.]

VIII. $I_a A_1$, I_b, B_1, $I_c C_1$ taie din nou cercul circumscris triunghiului ABC în A', B', C'. AA', BB', CC' concură în N. N este izogonalul punctului lui *Gergonne* al triunghiului ABC și se află pe IO. [A', B', C' sunt punctele unde cercul *Euler* taie din nou medianele triunghiului $I_a I_b I_c$. Proprietatea rezultă de aici. C. d. P. 92 IX și R. M. T. pr. 343 : *Col. Gh. Buicliu*].

IX. Perpendiculara din I_a pe $A_1 I$ taie pe $I_b I_c$ în T_a. T_a și analoagele sunt colineare pe o dreaptă perpendiculară pe OI. [C. d. P. 74 XII.]

X. Fie I'''_a, I'''_b, I'''_c simetricele punctelor I_a, I_b, I_c față de I. Dreptele $A_1 I'''_a$, $B_1 I'''_b$, $C_1 I'''_c$ concură în S, pe IO și $I\omega = \omega S$. [R. M. T. III—19.] [1])

XI. S_a, mijlocul dreptei $I_a S$. $S_a I''_a$ și analoagele concură în M [R. M. T. III—19]

XII. I''_a fiind simetricul lui I_a în raport cu A_1, cercurile $I_b I_c I'''_a$, de centru O''_a, și analoagele, se taie în I. [Cercurile considerate corespund cercurilor *Carnot*].

XIII. BC taie pe $I_b I_c$ în P_a. Cercurile $I_a A P_a$ și analoagele au o coardă comună care trece prin I. [R. M. T. pr. 473 *Gh. G. Buicliu.*]

XIV. Perpendiculara din I_a pe OI, taie pe $I_b I_c$ în R_a. Fie D_a paralela la BC dusă prin R_a. Cercurile circumscrise triunghiurilor $(D_a, I_a I_b, I_a I_c)$ și analoagelor sunt concentrice în I. [R. M. T. pr. 1036 : *C. Ionescu-Bujor.*]

---

[1]) Proprietățile sunt numai enunțate, demonstrația lor fiind ușoară și uniformă. Acolo unde proprietățile directe — dela triunghiu la triunghiul său ortic — sunt mai puțin evidente, se indică în paranteză, locul unde sunt demonstrate.

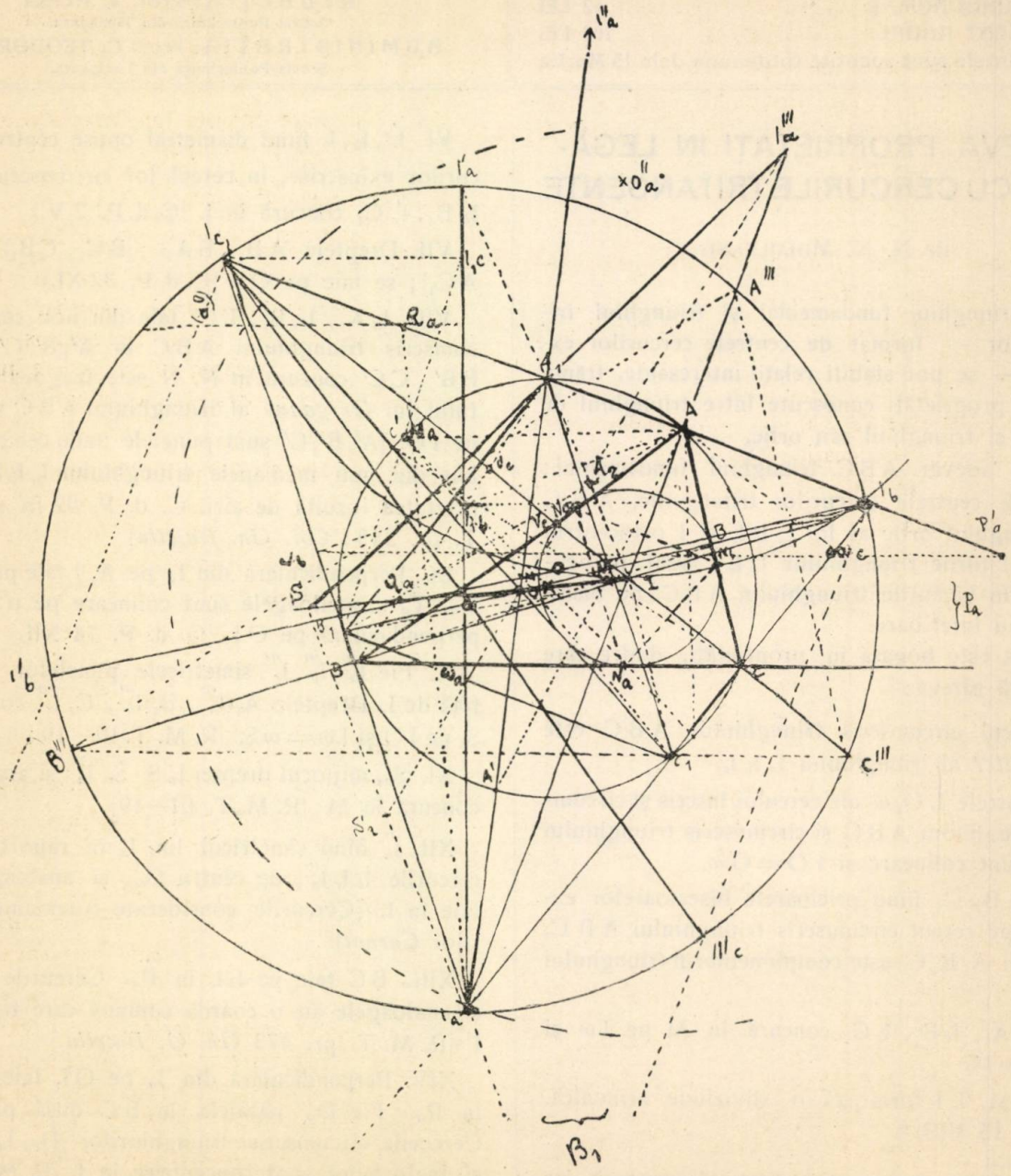
[2]) Culegerea de Probleme de Geometrie: *G. Țițeica*, 1929, probl. 15 cap. VIII. (Biblioteca G. M.)

[1]) Articolul: „Câteva proprietăți în legătură cu ortocentrul" *Al. Niculescu*, Revista Matematică din Timișoara, Anul III, No. 2, pag 19.

XV. Paralelele duse prin I la bisectoarele triunghiului tritangentelor, întâlnesc laturile acestui triunghiu în picioarele a trei ceviene.

Perpendicularele duse pe aceleaşi bisectoare, taie laturile triunghiului $I_a I_b I_c$ în trei puncte colineare.

Antiparalelele duse prin I, la $I_b I_c$, $I_a I_b$, $I_a I_c$, taie laturile triunghiului $I_a I_b I_c$ în puncte colineare. [R. M. T. pr. 558 : *N. G. Botea.*]



XVI. Dreptele $I_b I'_c$ şi $I_c I'_b$, taie respectiv pe $I_a I_c$, $I_a I_b$ în β_1 şi γ_1. $\beta_1 \gamma_1$ e perpendiculară pe $A I'_a$. [G. M. XXXVI—322.] [1]

XVII. $\beta_1 \gamma_1$ taie pe $I_b I_c$ în α'. α' şi analoagele sunt colineare pe polara triliniară a lui I, în triunghiul $I_a I_b I_c$. [G. M. XXXVI—321 sau R. M. T. pr. 937 : *Slt. A. Stan.*]

XVIII. Paralelele duse prin I la laturile triun-

[1]) Articolul: „Quelques propriétés du triangle": *V. Thébault*, Gazeta Matematică, anul XXXVI, pag. 321 şi u.

ghiului A B C, taie laturile corespunzătoare ale triunghiului $I_a I_b I_c$ în trei puncte colineare pe D'. Paralelele duse prin I la laturile triunghiului $I_a I_b I_c$, taie laturile triunghiului A B C în 3 puncte pe D''. D' şi D'' sunt paralele cu D, axul ortic al lui I în raport cu triunghiul $I_a I_b I_c$. [R. M. T. XI—85.] [1]

XIX. Dreptele care unesc pe I cu picioarele a trei ceviene I'_a, I'_b, I'_c în triunghiul A B C, determină în triunghiul $I_a I_b I_c$, trei puncte, picioarele a trei ceviene şi invers.

Analog când a', b', c' sunt colineare. [R. M. T. XI—86.]

XX. Fie a, b, c, trei puncte colineare sau picioarele a trei ceviene în triunghiul A B C. $a I_a$, $b I_b$, $c I_c$ determină pe laturile triunghiului $I_a I_b I_c$ trei puncte colineare sau sunt concurente şi invers. [R. M. T. XI—87.]

XXI. $I_a \omega$ taie pe B C în ω_a. A ω_a şi analoagele sunt concurente. [Aplicaţie a proprietăţei precedente. R. M. T. pr. 305: *G. I. Dumitrescu.*]

XXII. Tangenta în I la cercul $I_b I I_c$, taie pe B C în a_i. a_i şi analoagele sunt colineare. Tangenta în I la cercul B I C, taie pe $I_b I_c$ în α_i. $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sunt colineare. [R. M. T. XI—88.]

XXIII. $I_a \omega$, $I_b \omega$, $I_c \omega$ sunt respectiv izogonale faţă de I_a A, I_b B, I_c C în unghiurile B I_a C, C I_b A, A I_c B şi perpendiculare respectiv pe laturile triunghiului A B C.

XXIV. Simetricele lui ω în raport cu laturile triunghiului $A_1 B_1 C_1$ se află pe cercul (O) circumscris triunghiului A B C.

XXV. Fie A_2, B_2, C_2, mijloacele dreptelor I A_1, I B_1, I C_1. O este ortocentrul triunghiului $A_2 B_2 C_2$. [R. M. T. pr. 139: *I. T. Risescu.*]

XXVI. M_a diametral opus punctului unde înălţimea din A taie cercul (O) circumscris; I_b şi I_c se proiectează pe diametrul $I_a \omega$ în $I_1 c$ şi $I_1 b$. Dreptele $B_1 I_1 c$ şi $C_1 I_1 b$ se taie în M_a. [Soluţie: $\sphericalangle M_a A B = \sphericalangle B B_1 M_a = 2 \sphericalangle B I_a I_1 C = 2 \sphericalangle A I_a C = 2 (90^0 - \sphericalangle A I_b C) = 2 [\sphericalangle A I C - 90^0] = \widehat{B} = \sphericalangle A B C$. Deci $A M_a \| B C$.]

[1]) Articolul: „Câteva proprietăţi ale unor triunghiuri omologice": *Cezar Coşniţă*, Revista Matematică, Anul XI, No 8, pag. 85 şi u.

XXVII. Când $I_a \omega$ este o dreaptă arbitrară trecând prin I_a, intersecţia dreptelor $B_1 I_1 c$, $C_1 I_1 b$ descrie cercul (O). [C. d. P. 11—V.]

XXVIII. O''_a fiind centrul cercului $I_b I_c I''_a$, $\Delta (O''_a O''_b O''_c) = \Delta (I_a I_b I_c)$ Cercul celor 9 puncte al triunghiului $O''_a O''_b O''_c$ este cercul circumscris triunghiului A B C şi dreapta lui *Euler* este I O. [C. d. P. 13 V.]

XXIX. I O este dreapta lui *Euler* a triunghiului $I'''_a I'''_b I'''_c$. [R. M. T. III—19.]

XXX. Grupele de puncte: (B C $I'''_b I'''_c$), (C A $I'''_c I'''_a$), (A B $I'''_a I'''_b$) sunt respectiv conciclice. [R. M. T. III—19.]

XXXI. Dreptele lui *Simson* a două puncte M şi N, la extremitatea unui diametru Δ al cercului ω, se taie pe cercul circumscris triunghiului A B C în P. Dreapta lui *Simson* a lui P, faţă de cercul (O) este paralelă cu triunghiul. [C. d. P. V—33.]

XXXII. Perpendiculara într'un punct D, pe $I_b I_c$ taie cercul ω în M d N d. Fie M' d şi N' d mijloacele dreptelor I M d şi I N d; D M' d şi D N' d taie pe A C (sau A B) în M_1 şi N_1; dreptele MM_1 şi NN_1 sunt paralele. [C. d. P. 37 V.]

XXXIII. Centrele cercurilor exinscrise I_b, I_c se proectează pe B C în I_β, I_γ şi B C se proectează pe bisectoara exterioară a lui A, în B_α, I'_α.

$I_\beta I_\gamma$ este diametru al cercului $I_\beta I'_\alpha B_\alpha I_\gamma$.

$I_\beta I_\gamma$ este tangentă cercului de diametru $B_\alpha I'_\alpha$.

ω este centru radical al cercului $I_\beta I'_\alpha B_\alpha I_\gamma$ şi analoagelor. [C. d. P. 90 IX.]

XXXIV. Fie N_a, N_b, N_c contactele cercului înscris în triunghiul A B C pe laturile lui. Triunghiurile $N_a N_b N_c$ şi $I_a I_b I_c$ sunt asemenea. [C. d. P. 17 VIII.]

XXXV. Bisectoarele interioare ale triunghiului A B C taie cercul circumscris triunghiului tritangentelor în $A''' B''' C'''$. Triunghiul A B C este asemenea cu $A''' B''' C'''$. [A B C este triunghiul podar şi $A''' B''' C'''$ triunghiul metaarmonic al lui I. [C. d. P. 19 VIII].

XXXVI. Proecţiile vârfurilor A, B, C pe laturile triunghiului $I_a I_b I_c$ sunt conciclice [pe cercul *Taylor* al triunghiului $I_a I_b I_c$].

XXXVII. Fie α_b şi α_c proecţia lui A pe bisectoarele exterioare sau interioare ale unghiurilor B şi C; $\alpha_b \alpha_c \parallel BC$ şi taie pe $I_b I_c$ în P'_a. P'_a şi analoagele sunt trei puncte pe o dreaptă. [C. d. P. 33 şi 34 XI şi R. M. T. pr. 282: *P. Ratz* sau 907: *Vl. Crivăţ.*]

XXXVIII. Paralela dusă prin A la $\alpha_b \alpha_c$ este dreapta lui *Simson* a lui A''' în raport cu cercul ω. [R. M. T. pr. 382: *V. Alaci.*]

IXL. BA şi BA_1 determină pe CI, punctele U_c, V_c şi CA, CA_1 determină pe BI, punctele U_b, V_b.

$$\overline{U_b V_b} \cdot \overline{\omega C_1} = \overline{U_c V_c} \cdot \overline{\omega B_1}$$ [G. M. pr. 3974: *O. Ţino.*]

XL. Avem încă relaţiile:

$$\frac{\omega I_a}{0A} = \frac{\omega I_b}{0B} = \frac{\omega I_c}{0C} = 2.$$

$$\frac{II_a}{\omega A_1} = \frac{II_b}{\omega B_1} = \frac{II_c}{\omega C_1} = 2.$$

$$\frac{\overline{I_b A}}{\overline{IA}} \cdot \frac{\overline{I_c A}}{\overline{II_a}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{IB}} \cdot \frac{\overline{AI_a}}{\overline{II_b}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{IC}} \cdot \frac{\overline{AI_a}}{\overline{II_c}}$$ [C. d. P. 6 IX]

$$\frac{\omega A_1}{AI_a} + \frac{\omega B_1}{BI_b} + \frac{\omega C_1}{CI_c} = 1.$$

[C. d. P. 10 XIV.]

$$\frac{\overline{AI_b} \cdot \overline{AI_c}}{\overline{AI_a}^2} + \frac{\overline{BI_c} \cdot \overline{BI_a}}{\overline{BI_b}^2} + \frac{\overline{CI_a} \cdot \overline{CI_b}}{\overline{CI_c}^2} = 1.$$

[C. d P. 11 XIV.]

$$\frac{AI}{AI_a} + \frac{BI}{BI_b} + \frac{CI}{CI_c} = 1.$$

$$\frac{A\alpha_b}{BI_b} + \frac{A\alpha_c}{CI_c} = 1.$$

[R. M. T. pr. 223: *E. Ştefănescu.*]

α_b, α_c proecţia lui A pe $I_a I_c$, $I_a I_b$.

$$\overline{AI_a} \cdot \overline{II_a} + \overline{BI_b} \cdot \overline{II_b} + \overline{CI_c} \cdot \overline{II_c} = \overline{I_b I_c}^2 + \overline{I_c I_a}^2 + \overline{I_a I_b}^2$$

[G. M. pr. 2007: *E. N. Barisien.*]

$$2. \overline{BC} \cdot \overline{\omega I_a} = \overline{I_a I_c} \cdot \overline{IB} + \overline{I_a I_b} \cdot I_c$$

[G. M. pr. 2143: *V. Alaci.*

NOTE MATEMATICE

3. *Câteva identităţi trigonometrice stabilite cu ajutorul determinanţilor.*

1. Fie determinantul

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & b+c & a \\ \frac{1}{b} & c+a & b \\ \frac{1}{c} & a+b & c \end{vmatrix}$$

a, b, c fiind laturile unui triunghiu.

Pentru a-l calcula vom aduna coloana a treia la coloana a doua şi dând apoi pe $a+b+c=2p$, factor comun vom avea:

$$\Delta_1 = 2p \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{b} & 1 & b \\ \frac{1}{c} & 1 & c \end{vmatrix} = \frac{2p}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & a^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{2p(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$$

Determinantul se poate însă scri:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & b+c-a & a \\ \frac{1}{b} & c+a-b & b \\ \frac{1}{c} & a+b-c & c \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a(b+c-a) & a^2 \\ 1 & b(c+a-b) & b^2 \\ 1 & c(a+b-c) & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{2abcp} \begin{vmatrix} 1 & a[(b+c)^2-a^2] & a^2 \\ 1 & b[(c+a)^2-b^2] & b^2 \\ 1 & c[(a+b)^2-c^2] & c^2 \end{vmatrix}$$

Însă dacă a, b, c sunt laturile unui triunghiu avem:

$$(b+c)^2 - a^2 = 4\,b\,c\cos^2\frac{A}{2} \text{ etc.}$$

Deci:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2\,a\,b\,c\,p}\begin{vmatrix} 1 & 4\,a\,b\,c\cos^2\frac{A}{2} & a^2 \\ 1 & 4\,a\,b\,c\cos^2\frac{B}{2} & b^2 \\ 1 & 4\,a\,b\,c\cos^2\frac{C}{2} & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{2}{p}\begin{vmatrix} 1 & \cos^2\frac{A}{2} & a^2 \\ 1 & \cos^2\frac{B}{2} & b^2 \\ 1 & \cos^2\frac{C}{2} & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{2}{p}\left[b^2-c^2)\cos^2\frac{A}{2} + (c^2-a^2)\cos^2\frac{B}{2} + (a^2-b^2)\cos^2\frac{C}{2}\right]$$

Avem deci identitatea:

$$\frac{2}{p}\sum(b^2-c^2)\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2\,p\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}{a\,b\,c}$$

$$\sum(b^2-c^2)\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p^2\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}{a\,b\,c}$$

2. Fie determinantul:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Adunând coloanei întâia elementele coloanei a doua avem:

$$\Delta_2 = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c)\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$$

Pe de altă parte putem scri:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b+c-a & a & a^2 \\ c+a-b & b & b^2 \\ a+b-c & c & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{a+b+c}\begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & a & a^2 \\ (c+a)^2-b^2 & b & b^2 \\ (a+b)^2-c^2 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghiu avem:

$$\Delta_2 = \frac{1}{2\,p}\begin{vmatrix} 4\,b\,c\cos^2\frac{A}{2} & a & a^2 \\ 4\,c\,a\cos^2\frac{B}{2} & b & b^2 \\ 4\,a\,b\cos^2\frac{C}{2} & c & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{2}{p}\begin{vmatrix} \cos^2\frac{A}{2} & a^2 & a^3 \\ \cos^2\frac{B}{2} & b^2 & b^3 \\ \cos^2\frac{C}{2} & c^2 & c^3 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{2}{p}\sum c^2\,b^2\,(c-b)\cos^2\frac{A}{2}$$

Rezultă deci identitatea:

$$\frac{2}{p}\sum c^2\,b^2\,(c-b)\cos^2\frac{A}{2} = 2\,p\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$$

Inmulţind această identitate cu produsul $\frac{p}{2\,a^2\,b^2\,c^2}$ avem:

$$\sum\frac{c-b}{a^2}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p^2\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}{a^2\,b^2\,c^2} =$$

$$\frac{(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}{16\,R^2\,r^2}$$

3. Fie determinantul

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & \cot\frac{A}{2} \\ 1 & b & \cot\frac{B}{2} \\ 1 & c & \cot\frac{C}{2} \end{vmatrix}$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

Desvoltând după elementele coloanei a treia avem:

$$\Delta_3 = (c-b)\cot\frac{A}{2} + (a-c)\cot\frac{B}{2} + (b-a)\cot\frac{C}{2}$$

Dar

$$\cot\frac{A}{2} = \frac{p-a}{r} \text{ etc.,}$$

încât determinantul Δ_3 devine:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & \frac{p-a}{r} \\ 1 & b & \frac{p-b}{r} \\ 1 & c & \frac{p-c}{r} \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} 1 & a & p-a \\ 1 & b & p-b \\ 1 & c & p-c \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{r}\begin{vmatrix} 1 & a & p \\ 1 & b & p \\ 1 & c & p \end{vmatrix} = \frac{p}{r}\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Avem deci identitatea:

$$(c-b)\cot\frac{A}{2} + (a-c)\cot\frac{B}{2} + (b-a)\cot\frac{C}{2} = 0$$

Considerând alți determinanți și ținând seamă de anumite relații între elementele unui triunghiu, vom putea stabili încă numeroase identități trigonometrice.

CEZAR IVANESCU

4. — *Asupra problemei 514* (R. M. T. No. 1. An. XII).

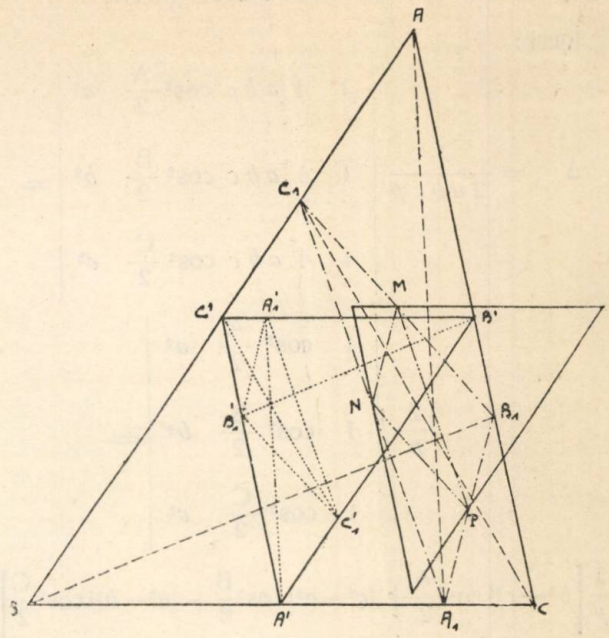
Acesta problemă este astfel enunțată:

„Se dă un triunghiu A B C *și* $A_1B_1C_1$ *triunghiul său ortic. Triunghiul format de paralelele duse prin mijloacele laturilor* A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, *respectiv la* A B, B C, C A *este egal cu complimentarul lui* A B C".

Problema rămâne întegral valabilă, dacă în loc de triunghiul ortic se consideră un triunghiu pedal oarecare adică cu enunțul:

„Se consideră un triunghiu pedal într'un triunghiu dat. Paralele duse prin mijloacele triunghiului pedal la triunghiul de referință, dau un triunghiu egal cu triunghiul median al acestuia".

Păstrând notațiile din locul citat, demonstrația poate fi dată sub forma ce urmează: Repet aceste notații:



Fie triunghiul A B C și A_1, B_1, C_1 picioarele a trei ceviene. Fie M N P mijloacele laturilor triunghiului $A_1B_1C_1$ și fie încă $A'B'C'$ triunghiul median al triunghiului A B C.

In triunghiul $A'B'C'$ care e omotetic cu A B C în raportul $^1/_2$ avem un omolog $A_1'B_1'C_1'$ omotetic cu $A_1B_1C_1$ în același raport. Cum M N P e omotetic cu $A_1B_1C_1$ în raportul $^1/_2$ rezultă că el e omotetic și cu $A_1'B_1'C_1'$ în raportul $^1/_1$ adică sunt și egale. Paralelele duse prin puncte (respectiv vârfuri) omoloage, vor da figuri omotetice în același raport. Problema e rezolvată.

SUB.-LT I. GH ZAMFIRESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XXXVII, No. 7, Martie 1932. Géométrie et Mécanique, par *V. Thébault.* Asupra unor medii, de *A. Angelescu.* Câteva locuri geometrice elementare, de *Col. Gh. Buicliu.*

2. *Boletin Matematico,* anul IV, No. 12 Februarie 1932. Dare de seamă asupra celor patru ani ai revistei: *Boletin Matematico,* de *B. I. Baidaff.* Provenienta revistei: *Boletin Matematico.* Asupra rectificărei aproximative a lungimei cercului, de *I. Hartmann.* Un strigăt de alarmă, de *B. I. Baidaff.*

3. *G. Vrănceanu.* Parallélisme et courbure dans une variété non holonome. (Extratto dagli Atti del Congresso Internazionale dei Matematici (Bologna, settembre 1928).

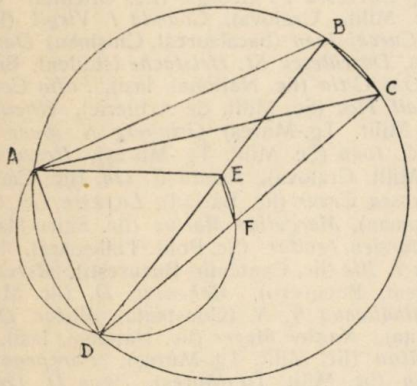
4. *G. Vrănceanu.* Sur le calcul différentiel absolu des congruences. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 25 juin 1928.

5. *G. Vrănceanu.* Sur quelque points de la théorie des espaces non holonomes. (Extrait du „Buletinul Facultăţei de Ştiinţe din Cernăuţi, 1932).

PROBLEME REZOLVATE

515. — *Se consideră un patrulater inscriptibil* A B C D. *Vârful* A *este fix, vârfurile* B *şi* C *descriu respectiv două drepte trecând prin* A, *iar diagonala* B D *trece print'un punct fix* E. *Dacă unghiul* A C B *este constant, să se arate că dreapta* C D *trece printr'un punct fix.*

N. G. BOTEA



Pe figură observăm: $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB =$ const., şi cum punctele A şi E sunt fixe, locul punctului D este un arc de cerc capabil de unghiul $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$. Cum însă avem şi $\widehat{CDE} = \widehat{CDB} = \widehat{CAB} =$ const., rezultă că dreapta CD trece printr'un punct fix F, al arcului EDA, astfel ca $\widehat{EDF} = \widehat{BAC}$.

Soluţii date de d-nii: *David H. Iancu* (lic. Naţional, Iaşi) *Dumitrescu Eugen* (lic. Buzău), *Manolescu I. N.* (Focşani) *Meyer Lazăr* (lic. Naţional, Iaşi), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti) *Neacşu Vasile* (lic. Braşov), *Segall L.* (lic. Naţional, Iaşi) şi *Taraş Vasile* (lic. Braşov).

1026. — *Să se stabilească identitatea:*

$$2\sum_{i=0}^{m-2} C_{m-1}^{i}\, C_{m-1}^{i+1} = \frac{m-1}{2m-1}\, C_{2m}^{m}$$

SUB.-LT. A. I STAN

Pornim de la relaţia cunoscută:

$$C_m^{i+1} = C_{m-1}^{i+1} + C_{m-1}^{i},$$

pe care ridicând'o la patrat, deducem:

$$2\, C_{m-1}^{i}\, C_{m-1}^{i+1} = (C_m^{i+1})^2 - (C_{m-1}^{i+1})^2 - (C_{m-1}^{i})^2$$

De aci deducem:

$$(1)\qquad 2\sum_{i=0}^{m-2} C_{m-1}^{i}\, C_{m-1}^{i+1} = \sum_{i=0}^{m-2} (C_m^{i+1})^2 - \sum_{i=0}^{m-2} (C_{m-1}^{i+1})^2 - \sum_{i=0}^{m-2} (C_{m-1}^{i})^2$$

Având însă în vedere relaţia cunoscută:

$$\sum_{h=0}^{p} (C_p^h)^2 = C_{2p}^{p},$$

putem scri:

$$\sum_{i=0}^{m-2} (C_m^{i+1})^2 = (C_m^1)^2 + (C_m^2)^2 + \ldots + (C_m^{m-1})^2 =$$

$$C_{2m}^{m} - (C_m^0)^2 - (C_m^m)^2 = C_{2m}^{m} - 2$$

$$\sum_{i=0}^{m-2} (C_{m-1}^{i+1})^2 = (C_{m-1}^1)^2 + (C_{m-1}^2)^2 + \ldots + (C_{m-1}^{m-1})^2 =$$

$$C_{2m-2}^{m-1} - (C_{m-1}^0)^2 = C_{2m-2}^{m-1} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{m-2} (C_{m-1}^{i})^2 = (C_{m-1}^0)^2 + (C_{m-1}^1)^2 + \ldots + (C_{m-1}^{m-2})^2 =$$

$$C_{2m-2}^{m-1} - (C_{m-1}^{m-1})^2 = C_{2m-2}^{m-1} - 1$$

Ţinând seamă de aceste ultime trei relaţii, (1) devine:

$$(2)\qquad 2\sum_{i=0}^{m-2} C_{m-1}^{i}\, C_{m-1}^{i+1} = C_{2m}^{m} - 2\, C_{2m-2}^{m-1}$$

Dar:

$$2\, C_{2m-2}^{m-1} = 2\,\frac{(2m-2)\,(2m-3)\ldots(m+1)\,m}{(m-1)!} =$$

$$\frac{2m\,(2m-1)\ldots(m+1)}{m!}\cdot\frac{m}{2m-1} = \frac{m}{2m-1}\, C_{2m}^{m}$$

astfel că (2) devine:

$$2\sum_{i=0}^{m-2} C_{m-1}^{i}\, C_{m-1}^{i+1} = \left(1 - \frac{m}{2m-1}\right) C_{2m}^{m} =$$

$$\frac{m-1}{2m-1} C_{2m}^{m} ,$$

care este tocma relaţia cerută.

Soluţii analoage date de d-nii: *Boeriu Valeriu* (Şc. Polit. Timişoara), *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit. Timişoara), *Mihăileanu N. N.* (lic Constanţa) şi *Serban Teodor.*

Altă soluţie. Dată de d-l: *Roşca St. Gheorghe.*

Dacă considerăm identitatea:

$$(1+x)^{m-1}(1+x)^{m-1} = (1+x)^{2m-2},$$

dezvoltăm binoamele şi egalăm coeficienţii lui x^{m-2} din cei doi membri, găsim:

$$C_{m-1}^{m-2} + C_{m-1}^{1} C_{m-1}^{m-3} + \ldots + C_{m-1}^{m-2} = C_{2m-2}^{m-2},$$

care se mai poate scri, ţinând seamă că $C_m^i = C_m^{m-i}$:

$$(1) \qquad 2 \sum_{i=0}^{m-2} C_{m-1}^{i} C_{m-1}^{i+1} = 2 C_{2m-2}^{m-2}$$

Dar:

$$2 C_{2m-2}^{m-2} = \frac{(2m-2)(2m-1)\ldots(m+1).2}{(m-2)!} =$$

$$\frac{2m(2m-1)\ldots(m+1).2}{(m-2)!\ 2m(2m-1)} =$$

$$\frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)(m-1)}{m!(2m-1)} = \frac{m-1}{2m-1} C_{2m}^{m},$$

astfel că (1) devine:

$$2 \sum_{i=0}^{m-2} C_{m-1}^{i} C_{m-1}^{i+1} = \frac{m-1}{2m-1} C_{2m}^{m} ,$$

care este tocmai identitatea cerută.

1028. — *Laturile unui triunghiu* ABC *sunt a, b, c. Pe latura a se construeşte patratul* BDEC, *pe latura b se construeşte triunghiul echilateral* ACF *şi pe latura c se construeşte trapezul isoscel* ABGH, *astfel că baza mică e c, baza mare 3 c, iar înălţimea* $\frac{c\sqrt{3}}{8}$. *Ce relaţie trebuie să existe între laturile a, b, c ale triunghiului, astfel ca suprafaţa patratului* BDEC *să fie suma suprafeţelor triunghiului* ACF *şi a trapezului* ABGH?

ROMEO N DUMITRASCU

Fie s_1, s_2, s_3 respectiv suprafeţele patratului, triunghiului şi a trapezului de care e vorba în enunţ.

E uşor de observat, că avem:

$$s_1 = a^2, \quad s_2 = b^2 \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad s_3 = c^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Cum conform enunţului:

$$s_1 = s_2 + s_3 ,$$

rezultă:

$$a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2) ,$$

sau:

$$4a^2 = \sqrt{3}(b^2 + c) ,$$

care este relaţia căutată.

Soluţii date de d-nii: *Acikgheozian N.* (lic. Spiru-Haret), Bucureşti), *Boerescu P. George* (lic. Oltenita) *Chircă I. Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit. Craiova), *Curchi Ioan* (bacalaureat, Chişinău) *Dan T. Traian* (Beiuş), *Dăscălescu St. Hristache* (student, Bucureşti), *Dimitriu Gh. C-tiu* (lic. Naţional, Iaşi), *Fofiu Cornel* (lic. Beiuş), *Gall Tica* (Şc. Milit. de Artilerie), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit. Tg.-Mureş) *Grinberg N. Meer* (student, Iaşi), *Ilie C. Ioan* (Şc. Milit. Tg.-Mureş), *Ilescu M. Emilian* (lic. Milit. Craiova), *Ioanin C. Gh.* (lic. Carol, Craiova), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Lupescu Gh. C.* (bacalaureat, Roman), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit. Timişoara), *Mecu Mihail, Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir Bucureşti), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mehedinţi D.* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Motoc. D. Mircea* (lic. Oltenita), *Nagler Meyer* (lic. Naţional, Iaşi), *Nenciulescu Hariton* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Parepeanu C. I., Petre C-tin* (lic. Milit. Tg -Mureş), *Popa D. Traian* (lic. Giurgiu), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit. Craiova), *Porumbescu D.* (Tg.-Ocna), *Purcel Atanasie* (Şc. Polit. Timişoara), *Roşca St. Veronica, Rusu D. C-tin* (Constanţa), *Savovici Florentin* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Serban Teodor, Stan I. Ioan* (lic. Roman) şi *Triscă S. Ioan* (Constanţa).

1031. — *Să se arate că expresia:*

$$3^{3n+2} + 2^{n+4},$$

este divizibilă prin 25, ori care ar fi n întreg.

SUB-LT ION C. VONICA

Expresia dată se poate scri succesiv:

$$3^{3n+2} + 2^{n+4} = 9 \times 27^n + 16 \times 2^n = 9 \times (25 +$$

$$2)^n + 16 \times 2^n = \text{mult. } 25 + 9 \times 2^n + 16 \times 2^n =$$

$$\text{mult. } 25 + 2^n \times (9 + 16) = \text{mult. } 25$$

Soluţii date de d-nii: *Acikgheozian N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Apostolescu R.* (lic. Milit., Iaşi), *Boerescu P. George* (Oltenita), *Breazu M. Mihail* (lic. Giurgiu), *Ciupercă N. Mihail* (lic. Milit., Iaşi), *Coandă I. Virgil* (lic.

Milit., Craiova), *Dan Traian* (lic. Beiuş), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Dimitriu Gh. C-tin, Dobrescu St.* (lic. Milit., Iaşi), *Fofiu Cornel* (lic. Beiuş), *Gall Tica* (bacalaureat), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Lascu Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Marsieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Motoc D Mircea* (lic. Olteniţa), *Nagler Meyer* (lic. Naţional, Iaşi), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Oprea D. Stănescu-Brezuica* (Caracal), *Parepeanu C. I.* (Şc. Milit. de Geniu), *Popa B. Ioan* (Timişoara), *Popa Gh. Ioan* (student, Bucureşti), *Popa D. Traian* (lic Giurgiu), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Roşca Şt George, Serban Teodor, Sova C. Ion* (Şc. Milit. de Geniu), *Tanase V. Octavian* (lic. Naţional, Iaşi), *Triscă S. Ioan* (Constanţa), *Velicescu N. Nicolae şi Virag Veronica* (studentă, Cluj).

1032. — *Se cer patratele perfecte de patru cifre, care sunt în acelaşi timp şi cuburi perfecte:*

EMILIAN MEREUTA

Numerile de patru cifre care sunt cuburi perfecte sunt: 1000, 1331, 1728, 2197, 2744, 3375, 4096, 4913, 5832, 6859, 8000, 9261. Dintre acestea numai 4096 este şi patrat perfect:

$$4096 = 64^2 = 16^3,$$

şi ne dă singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-nii: *Acikgheozian N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Boerescu George* (lic. Olteniţa), *Dan Traian* (lic. Beiuş), *Dimitriu Gh C-tin* (lic. Naţional, Iaşi), *Fofiu Cornel* (lic. Beiuş), *Gheorghe Valeriu* (lic Milit. Tg.-Mureş), *Grinberg N. Meer* (student, Iaşi), *Ioanin C. Gh.* (lic. Carol, Craiova), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Landman Ş.* (Tighina), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mecu Mihail* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mehedinţi D. D-tru* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Motoc D. Mircea* (lic. Olteniţa), *Nagler Meyer* (lic. Naţional, Iaşi), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Nicolaescu Stelian* (lic. R.-Vâlcea), *Popa B. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa Gh. Ioan* (student, Bucureşti), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Purcel At.* (Şc. Polit., Timişoara), *Savovici Florentin* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Sova C. I.* (Şc Milit de Geniu), *Stan I.* (lic. Roman), *Tănase V. Octavian* (lic. Naţional, Iaşi), *Tica P. Marin* (Şc. Milit. de Geniu) şi *Triscă Ioan* (Constanţa).

Observare. Mulţi din corespondenţi de mai sus au observat că această problemă este un caz particular a problemei: *„Se cer numerile mai mici ca 10^6, cari sunt în acelaşi timp patrate şi cuburi perfecte"*, care este rezolvată în „R. M. T." anul VIII, pag. 152.

1034. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ xyz = x + y + z \\ x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 = 49 \end{cases}$$

CEZAR IVANESCU

Notând:

$$(1) \qquad \begin{cases} x + y + z = u \\ xy + yz + zx = v \\ xyz = w, \end{cases}$$

rezultă că sistemul dat se poate scri:

$$(2) \qquad \begin{cases} u^2 - 2v = 14 \\ w = u \\ v^2 - 2uw = 49 \end{cases}$$

Acest sistem, ţinând seamă de a 2^a ecuaţie, se poate scri:

$$(3) \qquad \begin{cases} u^2 - 2v = 14 \\ v^2 - 2u^2 = 49 \end{cases}$$

Aci eliminând pe u^2, găsim:

$$v^2 - 4v - 77 = 0,$$

de unde deducem:

$$v = 11 \quad \text{şi} \quad v = -7$$

Înlocuind aceste valori în prima ecuaţie din (3), deducem valorile corespunzătoare pentru u şi atunci rezultă pentru sistemul (2), următoarele sisteme de soluţii:

$$\begin{cases} u = 6 \\ v = 11 \\ w = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = -6 \\ v = 11 \\ w = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 0 \\ v = -7 \\ w = 0 \end{cases}$$

Substituind pe rând aceste sisteme de valori găsite pentru u, v, w în (1) avem cunoscut suma lui x, y, z, suma produselor lor câte două şi produsul lor.

Putem construi astfel următoarele ecuaţii de gradul al 3-lea, ale căror rădăcini sunt x, y, z:

$$(4) \qquad t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$$

$$(5) \qquad t^3 + 6t + 11t + 6 = 0$$

$$(6) \qquad t^3 - 7t = 0$$

Ecuaţia (4) are rădăcinele 1, 2, 3; ecuaţia (5) are rădăcinele -1, -2, -3; iar ecuaţia (6) are rădăcinele $-\sqrt{7}$, 0, $\sqrt{7}$.

Rezultă că sistemul dat admite următoarele 18 sisteme de soluţii, trecute în tabloul alăturat.

x	y	z
± 1	± 2	± 3
± 1	± 3	± 2
± 2	± 1	± 3
± 2	± 3	± 1
± 3	± 1	± 2
± 3	± 2	± 1
$-\sqrt{7}$	0	$\sqrt{7}$
$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	0
0	$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$
0	$\sqrt{7}$	$-\sqrt{7}$
$\sqrt{7}$	0	$-\sqrt{7}$
$\sqrt{7}$	$-\sqrt{7}$	0

Soluții date de d-nii: *Acikgheozian N* (lic. Spiru-Haret București), *Boerescu P. George* (lic. Olteniţa), *Boeriu Valer* (Şc. Polit., Timişoara), *Chirca I. Mihai* (lic. Milit. Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit. Craiova), *Curchi Ioan* (bacalaureat, Chişinău), *Dan P. Traian* (lic. Beiuş), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Dimitriu Gh. C-tin* (lic. Naţional, Iaşi), *Dumitrascu N. Romeo* (Şc. Polit. Bucureşti), *Foţiu Cornel* (lic. Beiuş), *Grinberg N. M.* (student, Iaşi), *Iliescu M Emilian* (lic. Milit., Craiova), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Ioanin C. Gh.* (lic, Carol, Craiova), *Landman S.* (Tighina), *Lascu Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Manaşiu N. D-tru* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mehedinţi D. D-tru* (lic. Milit. Tg.-Mureş) *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Motoc D. Mircea* (lic. Olteniţa), *Nagler Meyer* (lic. Naţional, Iaşi), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Nenciulescu Hariton* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Nicolaescu Stelian* (lic. R.-Vâlcea), *Paki Ernest* (lic. Petroşani), *Pănoiu Emanoil* (Craiova), *Pop I. Leontin* (Şc. Polit, Timişoara), *Popescu I. Alexandru* (Şc. Polit., Timişoara), *Popescu Iosif* (lic. Petroşani), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Predoescu I. M.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Purcel At* (Şc. Polit, Timişoara), *Savovici Florentin* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Stan I. Ioan* (lic. Roman), *Tica P. Marin* (bacalaureat, Craiova) şi *Triscă S. Ioan* (Constanţa).

1038. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relaţia:*

$$\sum \frac{a^2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \sum \frac{a^2 \cos B \cos C}{\sin A}$$

Să se deducă de aci, că între unghiurile unui triunghiu, avem relaţia:

$$16 \cos A \sin \frac{A}{2} \cos B \sin \frac{B}{2} \cos C \sin \frac{C}{2} \Sigma \sin A = \sin 2A \sin 2B \sin 2C$$

N. MIHAILEANU

Notăm cu E_1 şi E_2 respectiv cei doi membrii ai relaţiei de mai sus. Putem scri succesiv:

$$E_1 = \sum \frac{2a^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin A} =$$

$$2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sum \frac{a^2}{\sin A}$$

Cum:

$$(1) \qquad a = 2R \sin A,$$

putem scri:

$$(2) \qquad E_1 = 8R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \Sigma \sin A$$

Cum se cunoaşte încă relaţia:

$$\Sigma \sin A = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

rezultă:

$$(3) \quad E_1 = 32R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} =$$

$$4R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

De altă parte putem scri încă: ţinând seamă de (1):

$$(4) \qquad E_2 = \sum \frac{4R^2 \sin^2 A \cos B \cos C}{\sin A} =$$

$$4R^2 \Sigma \sin A \cos B \cos C.$$

Cum se cunoaşte încă relaţia:

$$\Sigma \sin A \cos B \cos C = \sin A \sin B \sin C,$$

putem scri:

$$(5) \qquad E_2 = 4R^2 \sin A \sin B \sin C$$

Comparând relaţiile (3) şi (5), deducem:

$$E_1 = E_2,$$

şi deci prima relaţie din enunţ este astfel stabilită.

Să stabilim acum a 2-a relaţie din enunţ.

Pentru că, $E_1 = E_2$, rezultă din (2) şi (5), după ce simplificăm cu $4R^2$:

$$2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \Sigma \sin A = \sin A \sin B \sin C$$

Multiplicând această relaţie cu $8 \cos A \cos B \cos C$, avem:

$$16 \cos A \sin \frac{A}{2} \cos B \sin \frac{B}{2} \cos C \sin \frac{C}{2} \Sigma \sin A =$$

$$\sin 2A \sin 2B \sin 2C,$$

care este a 2-a relaţie cerută în enunţ.

Soluţii date de d-nii: *Acikgheozian N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Dan Traian* (lic. Beiuş), *Fofiu Cornel* (lic. Beiuş), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Parepeanu C. I.* (Şc. Milit. de Geniu), *Pop I. Leontin* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Virag Veronica* (studentă, Cluj).

1039. — *Să se găsească o fracţie a cărei valoare nu se schimbă dacă se adună numărătorului* $4k$, *iar numitorului* $5k$, *ştiind că cel mai mic comun multiplu al termenilor fracţiei este* 380.

IOAN CURCHI

Fie $\frac{a}{b}$ fracţia cerută. Conform enunţului avem:

$$\frac{a+4k}{b+5k} = \frac{a}{b}$$

Scăzând numărătorii şi numitorii şi simplificând prin k, găsim:

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$$

Cum, $380 = 4 \times 5 \times 19$, observăm uşor că dacă luăm:

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{5} = \frac{4 \times 19}{5 \times 19} = \frac{76}{95}$$

atunci numerile 76 şi 95, au raportul $\frac{4}{5}$ şi $c.m.$ $c.m$ 380, deci fracţia cerută este $\frac{76}{95}$.

Soluţii date de d-nii: *Acikgheozian N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Chircă I. Mihai* (lic. Milit. Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit. Craiova), *Dan T. Traian* (lic. Beiuş), *Dăscălescu Şt. Hrist che* (student, Bucureşti), *Dimitriu Gh. C-tin* (lic. Naţional, Iaşi), *Fofiu Cornel* (Beiuş), *Grinberg N. Meer* (student, Iaşi), *Ioanin C. Gh.* (lic. Carol Craiova), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Landmann Ş.* (Tighina), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Nagler Meyer* (lic. Naţional, Iaşi), *Pop Leontin* (Sc. Polit Timişoara), *Popa B. Ioan* (Şc. Polit. Timişoara), *Popa Gh. Ioan* (student, Bucureşti), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit. Craiova), *Purcel Atanasie* (Şc. Polit. Timişoara), *Sova C. I. Grigoreni* (Şc. Milit. de Geniu), *Stoica* (Sub-Lt), *Stoicescu I. Ernest* (Şc. Milit. de Geniu), *Tăutu Ştefan* (lic. Roman) şi *Triscă S. Ioan* (Constanţa).

1041 — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} y(1+x^2) = ax(1+y^2) \\ y(1-x^2) = bx(1-y^2) \end{cases}$$

I. DUMITRIU-DADA

Sistemul dat se poate scri sub forma:

$$\begin{cases} \frac{1+x^2}{x} = a\frac{1+y^2}{y} \\ \frac{1-x^2}{x} = b\frac{1-y^2}{y} \end{cases}$$

Diferenţa patratelor acestor ecuaţiuni, ne dă:

$$4 = \frac{a^2(1+y^2)^2 - b^2(1-y^2)^2}{y^2}$$

sau:

$$(1) \qquad a^2(1+y^2)^2 - b^2(1-y^2)^2 - 4y^2 = 0$$

Cum:

$$-4y^2 = (1-y^2)^2 - (1+y^2)^2 ,$$

ecuaţia (1) devine:

$$(1+y^2)^2 (a^2-1) = (1-y^2)^2 (b^2-1) ,$$

de unde:

$$\frac{1+y^2}{1-y^2} = \frac{\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1-a^2}}$$

Aplicând aci o proprietate cunoscută a proporţiilor, deducem:

$$y^2 = \frac{\sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-a^2}} = \frac{(\sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2})^2}{a^2-b^2},$$

deci:

$$y = \frac{\sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

Analog pentru a afla pe x, putem scri sistemul dat, sub forma:

$$\begin{cases} \dfrac{1+x^2}{a\,x} = \dfrac{1+y^2}{y} \\ \dfrac{1-x^2}{b\,x} = \dfrac{1-y^2}{y} \end{cases}$$

Prin operaţiuni analoage se deduce usor:

$$x = \frac{a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

Privind încă sistemul dat, observăm că dacă el admite un sistem de soluţii (x_1, y_1), admite şi pe $(-x_1, -y_1)$.

Aceasta este soluţia dată de autor.

Alte soluţii, date de d-nii: *Boerescu P. George* (lic. Oltenita), *Dan T. Traian* (lic. Beiuş), *Ioanin C. Gh.* (lic. Carol, Craiova), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Motoc D. Mircea* (lic. Oltenita), *Pop I. Leontin* (Şc. Polit. Timişoara), *Predoiu Fl.* (Şc. Navală), *Sova C. I. Grigoreni* (Şc. Milit. de Geniu) şi *Tâutu Ştefan* (lic. Roman).

PROBLEME PROPUSE

1088. — Să se afle patratul perfect de cinci cifre, astfel ca numărul format de primele două cifre să fie răsturnatul numărului format de ultimele două cifre, iar cifra din mijloc, care e egală cu suma cifrelelor rădăcinei, să fie divizor al sumei cifrelor patratului.

VALERIU A. NOVACU

1089. — Suma termenilor unei progresiuni aritmetice, fără ultimul termen este 231; suma fără primul termen, este 275; iar suma, fără primii doi şi fără ultimii doi termeni, este 184. Se cere progresiunea.

I. DUMITRIU-DADA

1090. — Să se stabilească identităţile:

$$(x-1)(y-1)(z-1) + \Sigma(x-1)(y+1)(z+1) = 4(xyz-1)$$

$$(x+1)(y+1)(z+1) + \Sigma(x+1)(y-1)(z-1) = 4(xyz+1)$$

CEZAR CSONITA

1091. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 4x^2 - 12xy + 6x - 9y + 9y^2 = 10 \\ 3x^2 - 2x + 5xy - 8y = 14 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

1092. Fie A B C un triunghiu dreptunghiu cu unghiul drept în A şi A D înălţimea din A pe ipotenuză. Se ia pe cateta A B segmentul A M egal cu jumătate din proecţia ei pe ipotenuză şi se uneste M cu C. Pe M C se ia segmentul M N = A M. Punctul Q de intersecţie a dreptei ce trece prin D şi N cu prelungirea catetei A B se uneşte cu C şi cu C_1, simetricul lui C faţă de M, iar C_1 se uneste cu B. Să se demonstreze că:

1°. Triunghiul N D C este isoscel.

2°. Triunghiul Q C_1 N este isoscel.

3°. Patrulaterul Q C_1 B C este un paralelogram.

IOAN B. POPA

1093. M fiind un punct în planul triunghiului A B C, perpendiculara în M_a pe A M taie laturile A C, A B în B_a, C_a. Perpendicularele ridicate în B_a şi C_a pe aceste laturi se taie în P_a. P_b, P_c fiind puncte analoage, dreptele A P_a, B P_b, C P_c sunt concurente.

N N. MIHAILEANU

1094. Să se rezolve un triunghiu A B C, cunoscând unghiul A, latura a şi raza cercului exînscris r_a.

Aplicaţie: $\sphericalangle A = 90^0$, $a = 5$ cm., $r_a = 6$ cm.

V. ALACI

1095. Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se demonstreze că avem:

$$\frac{2p^2 \sin A \sin B \sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} = \frac{R}{2}(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$$

CEZAR IVANESCU

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii: *F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos* și *J. Tschlek*, Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann*, La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale*, Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez*, Salta (Rep. Argentina), *M. A Basoco* și *E. T. Bell*, Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff*, Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera*, S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky*, Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler*. Washington (Statele Unite), *J. Shohat*, Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville*, Wellington (N Zelandia), *V. Thébault*, Le Mans (Francia), *O. Szász*, Frankfurt a. M. (Alemania). *G. Vivanti*. Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu și-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngri. jire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Abonamentul pe anul XII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

Rugăm pe corespondenții noștri, a ne trimete din timp abonamentul pe anul XII, care începe cu acest număr. Prețul abonamentului este de 100 (una sută) lei.

ANUL XII. 15 MAIU 1932 NO. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. D. V. IONESCU METODA PENTRU DETERMINAREA CENTRELOR DE GREUTATE.
2. NOTE MATEMATICE: 5, 6.
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 442, 485, 537 544, 1040, 1042. 1045, 1047, 1048.
5. PROBLEME PROPUSE: 1096-1103.
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Avem plăcerea a anunța că începând cu luna Aprilie 1932, fac parte din Comitetul Revistei Matematice și D-nii:

1. **Miron Niculescu**, doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cernăuți, Str. Paris 14, București.
2. **Căpitan Gh. Niculescu**, inginer, Str. Izvor 98, București.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** — profesor Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Școala Politechnică din Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XI inclusiv, broșate, 120 lei fiecare.

ANUL XII — No 3. TIMISOARA, 15 MAIU 1932

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Şcoala Politechnică din Timişoara.

METODĂ PENTRU DETERMINAREA CENTRELOR DE GREUTATE.

de D. V. IONESCU
PROFESOR UNIVERSITAR, CLUJ

Se ştie că centrul de greutate al unui triunghiu omogen A B C este în punctul de intâlnire al medianelor lui. Luând un punct O ca origină, şi notând cu G centrul de greutate, avem:

$$(1) \qquad \vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

Deasemenea se ştie că centrul de greutate al unui tetraedru omogen A B C D este în punctul de întâlnire al dreptelor care unesc vârfurile lui cu centrele de greutate ale feţelor opuse. Acest punct G este definit de egalitatea vectorială:

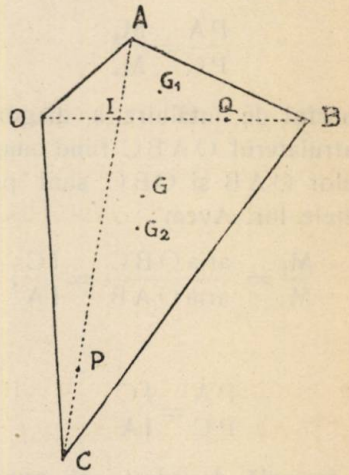
$$(2) \qquad \vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{4}$$

Centrul de greutate al maselor $m_1, m_2, \ldots m_p$, plasate în punctele $M_1, M_2, \ldots M_p$ se află în punctul G definit de egalitatea vectorială

$$(3) \qquad \vec{OG} = \frac{m_1.\vec{OM_1} + m_2.\vec{OM_2} + \cdots + m_p.\vec{OM_p}}{m_1 + m_2 + \ldots m_p}$$

In acest articol vrem să arătăm metode vectoriale simple pentru determinarea centrului de greutate a câtorva corpuri obişnuite. Vom trata despre patrulater oarecare, trapez, solid format din două piramide triunghiulare cu o faţă comună, şi trunchiu de piramidă. Vom aplica sistematic formulele (1), (2) şi (3). Metoda aceasta este absolut generală. Ea va rezulta din exemplele ce vom trata.

1. *Centrul de greutate al unui patrulater.* Să considerăm patrulaterul O A B C. Fie M_1 şi M_2 masele triunghiurilor O A B, O B C şi G_1 şi G_2



centrele lor de greutate. Centrul de greutate G al patrulaterului, este centrul de greutate al maselor M_1 şi M_2 plasate în G_1 şi G_2.

Avem:

$$\vec{OG_1} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{3}, \quad \vec{OG_2} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

şi prin urmare:

$$\vec{OG} = \frac{M_1.\vec{OG_1} + M_2.\vec{OG_2}}{M_1 + M_2},$$

adică:

$$\vec{OG} = \frac{M_1(\vec{OA} + \vec{OB}) + M_2(\vec{OB} + \vec{OC})}{3(M_1 + M_2)}$$

Mai putem scrie această formulă:

$$(4) \qquad \vec{OG} = \frac{\vec{OB}}{3} + \frac{1}{3}\frac{M_1.\vec{OA} + M_2.\vec{OC}}{M_1 + M_2}$$

Vectorul:

$$\vec{OP} = \frac{M_1.\vec{OA} + M_2.\vec{OC}}{M_1 + M^2},$$

defineşte centrul de greutate P al maselor M_1 şi M_2 plasate în A şi C. Acest punct se află pe diagonala AC într'un punct care împarte segmentul AC în părţi proporţionale cu M_1 şi M_2, adică:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{M_2}{M_1}.$$

Fie I punctul de întâlnire a diagonalelor OB şi AC. Patrulaterul OABC fiind omogen, masele triunghiurilor OAB şi OBC sunt proporţionale cu suprafeţele lor. Avem:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{\text{aria } OBC}{\text{aria } OAB} = \frac{IC}{IA},$$

şi deci:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{IC}{IA}.$$

Această formulă dovedeşte că punctul P este simetricul lui I în raport cu mijlocul lui AC.

Formula (4) se mai scrie deci:

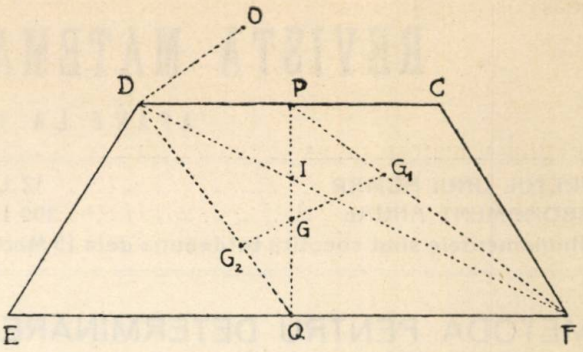
$$\vec{OG} = \frac{\vec{OB} + \vec{OP}}{3},$$

ceace dovedeşte că centrul de greutate G al patrulaterului OABC este identic cu centrul de greutate al triunghiului OPB.

Dacă notăm cu Q simetricul lui I în raport cu mijlocul diagonalei OB, mai putem spune că centrul de greutate G al patrulaterului OABC este centrul de greutate al triunghiului IPQ.

2. *Centrul de greutate al unui trapez.* Să considerăm trapezul omogen CDEF şi fie G_1 şi G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor CDF, DEF; M_1 şi M_3 masele lor care sunt proporţionale cu bazele b şi B ale trapezului.

Centrul de greutate G al trapezului este definit de egalitatea vectorială



$$\vec{OG} = \frac{M_1.\vec{OG_1} + M_2\,\vec{OG_2}}{M_1 + M_1} = \frac{b.\vec{OG_1} + B.\vec{OG_2}}{b + B}$$

Insă:

$$\vec{OG_1} = \frac{\vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OF}}{3}, \quad \vec{OG} = \frac{\vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF}}{3}$$

şi deci:

$$(5) \qquad \vec{OG} = \frac{b(\vec{OC} + \vec{OD}) + B(\vec{OE} + \vec{OF})}{3(b + B)} + \frac{1}{3}\frac{b.\vec{OF} + B\,\vec{OD}}{b + B}$$

Insă:

$$\vec{OC} + \vec{OD} = 2\vec{OP}, \quad \vec{OE} + \vec{OF} = 2\vec{OQ}$$

P şi Q fiind mijloacele bazelor DC şi EF.

Vectorul:

$$\vec{OI} = \frac{b.\vec{OF} + B.\vec{OD}}{b + B}$$

defineşte centrul de greutate I al maselor b şi B plasate în F şi D. Acest punct este pe DF şi avem:

$$\frac{ID}{IF} = \frac{b}{B}$$

Insă şi raportul $\frac{DP}{QF}$ este egal cu $\frac{b}{B}$ ceace arată că punctele P, I, Q sunt în linie dreaptă şi avem:

$$\frac{IP}{IQ} = \frac{b}{B}$$

ceace dovedește că I este și centrul de greutate al maselor b și B plasate Q și P, adică avem:

$$\overrightarrow{OI}=\frac{b.\overrightarrow{OF}+B.\overrightarrow{OD}}{b+B}=\frac{b.\overrightarrow{OQ}+B.\overrightarrow{OP}}{b+B}$$

și prin urmare formula (5) se va scrie:

$$\overrightarrow{OG}=\frac{2b.\overrightarrow{OP}+2B.\overrightarrow{OQ}+(b.\overrightarrow{OQ}+B\overrightarrow{OP})}{3(B+b)}$$

sau:

$$\overrightarrow{OG}=\frac{(B+2b)\overrightarrow{OP}+(b+2B)\overrightarrow{OQ}}{3(B+b)}$$

Formula aceasta dovedește că *centrul de greutate al trapezului este centrul de greutate al maselor* $B+2b$ *și* $b+2B$ *plasate în* P *și* Q. Se regăsește proprietatea centrului de greutate care conduce la construcția clasică a lui.

3. *Centrul de greutate al unui solid format din două piramide care au o față comună.* Fie SABC, SACD cele două piramide care au fața SAC în comun. Notăm cu M_1 și M_2 masele lor, G_1 și G_2 centrele lor de greutate. Centrul de greutate G al solidului este definit de egalitatea vectorială:

$$\overrightarrow{SG}=\frac{M_1.\overrightarrow{SG_1}+M_2.\overrightarrow{SG_2}}{M_1+M_2}$$

Insă:

$$\overrightarrow{SG_1}=\frac{\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}}{4},\quad \overrightarrow{SG_2}=\frac{\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}}{4}$$

așa că putem scrie:

$$(6)\qquad \overrightarrow{SG}=\frac{\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}}{4}+\frac{1}{4}\frac{M_1.\overrightarrow{SB}+M_2.\overrightarrow{SD}}{M_1+M_2}$$

Vectorul:

$$\overrightarrow{SP}=\frac{M_1.\overrightarrow{SB}+M_2.\overrightarrow{SD}}{M_1+M_2},$$

definește centrul de greutate P al maselor M_1 și M_2 plasate în B și D. El se găsește pe dreapta BD și avem:

$$\frac{PB}{PD}=\frac{M_2}{M_1}$$

Fie I intersecția lui BD cu planul SAC. Este ușor de văzut că raportul maselor M_2 și M_1 este egal cu raportul segmentelor ID și IB. Așa că avem:

$$\frac{PB}{PD}=\frac{ID}{IB}$$

ceace dovedește că P este simetricul lui I în raport cu mijlocul lui BD.

Formula (6) devine:

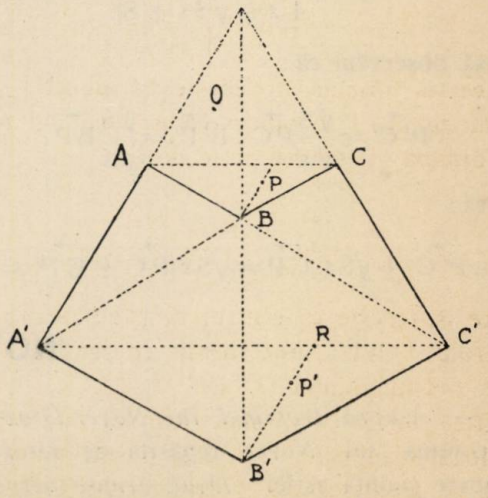
$$\overrightarrow{SG}=\frac{\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SP}}{4},$$

adică centrul de greutate al solidului coincide cu centrul de greutate al tetraedrului care are ca vârf P și ca bază fața SAC comună celor două piramide din care este compus solidul.

4. *Centrul de greutate al trunchiului de piramidă.* Va fi suficient să tratăm chestiunea pentru trunchiul de piramidă cu baza triunghiu.

Fie ABC, A′B′C′ cele două baze ale căror arii le notăm cu s și cu S. Trunchiul de piramidă se compune din piramidele C′ABC, BAA′C′, AA′B′C′ ale căror volume sunt:

$$\frac{sI}{3},\quad \frac{\sqrt{Ss}I}{3},\quad \frac{SI}{3}$$



Prin urmare masele celor trei piramide sunt proporționale cu:

$$s,\quad \sqrt{Ss},\quad S.$$

Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale acestor piramide și G centrul de greutate al trunchiului de piramidă vom avea:

$$\vec{OG} = \frac{s.\vec{OG_1} + \sqrt{Ss}\,\vec{OG_2} + S.\vec{OG_3}}{s + \sqrt{Ss} + S}$$

O fiind o origină oarecare.

Fie P şi P′ centrele de greutate ale celor două baze ABC şi A′B′C′ şi fie Q şi R mijloacele segmentelor AB şi A′C′. Avem:

$$\vec{OG_1} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OC'}}{4} = \frac{3\vec{OP} + \vec{OC'}}{4}$$

$$\vec{OG_3} = \frac{\vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} + \vec{OB}}{4} = \frac{3\vec{OP'} + \vec{OB}}{4}$$

$$\vec{OG_2} = \frac{\vec{OB} + \vec{OA} + \vec{OA'} + \vec{OC'}}{4} = \frac{2\vec{OQ} + 2\vec{OR}}{4},$$

aşa că avem:

$$\vec{OG} = \frac{s(3\vec{OP} + \vec{OC'}) + \sqrt{Ss}(2\vec{OQ} + 2\vec{OR}) + S(3\vec{OP'} + \vec{OB})}{4(s + \sqrt{Ss} + S)}$$

Insă avem:

$$2\vec{OQ} = 2\vec{OP} + \vec{CP}$$

$$2\vec{OR} = 2\vec{OP'} + \vec{B'P'}$$

$$\vec{OC'} = \vec{OP'} + \vec{P'C'}$$

$$\vec{OB} = \vec{OP} + \vec{PB},$$

de unde deducem că:

$$\vec{OG} = \frac{s(3\vec{OP} + \vec{OP'} + \vec{P'C'}) + \sqrt{Ss}(2\vec{OP} + 2\vec{OP'} + \vec{CP} + \vec{B'P'}) + S(3\vec{OP'} + \vec{OP} + \vec{PB})}{4(s + \sqrt{Ss} + S)}$$

sau:

$$\vec{OG} = \frac{(3s + 2\sqrt{Ss} + S)\vec{OP} + (3S + 2\sqrt{Ss} + s)\vec{OP'}}{4(s + \sqrt{Ss} + S)}$$

$$+ \frac{(s.\vec{P'C'} + \sqrt{Ss}.\vec{CP}) + (S.\vec{PB} + \sqrt{Ss}.\vec{B'P'})}{4(s + \sqrt{Ss} + S)}.$$

Insă observăm că:

$$\vec{P'C'} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{s}}\vec{PC},\quad \vec{B'P'} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{s}}\vec{BP},$$

aşa că:

$$s.\vec{P'C'} + \sqrt{Ss}.\vec{CP} = \sqrt{Ss}(\vec{PC} + \vec{CP}) = 0$$

$$S.\vec{PB} + \sqrt{Ss}.\vec{B'P'} = S(\vec{PB} + \vec{BP}) = 0,$$

şi prin urmare avem în definitiv:

$$\vec{OG} = \frac{(3s + 2\sqrt{Ss} + S)\vec{OP} + (3S + 2\sqrt{Ss} + s)\vec{OP'}}{4(s + \sqrt{Ss} + S)}$$

Această formulă arată că centrul de greutate G al trunchiului de piramidă concide cu centrul de greutate al maselor $3s + 2\sqrt{Ss} + S$, $3S + 2\sqrt{Ss} + s$ plasate în P şi P′. El se găseşte deci pe dreapta PP′ şi avem:

$$\frac{GP}{GP'} = \frac{3S + 2\sqrt{Ss} + s}{3s + 2\sqrt{Ss} + S}.$$

NOTE MATEMATICE

5. — *Asupra teoremei lui Noyer-Droz-Farny.* Teorema lui *Noyer* regăsită de *Droz-Farny* se poate enunţa astfel: *Două drepte perpendiculare d, d′ duse prin ortocentrul* H *al unui triunghiu* ABC *determină pe laturi trei segmente a căror mijloace sunt colineare.* Chestiunea e mai ales cunoscută din studiile d-lor *Goormaghtigh* şi *Thébault.*

α, β, γ fiind mijloacele segmentelor determinate de cele 2 perpendiculare d şi d' trecând prin H pe laturile triunghiului ABC, d-l *Goormaghtigh* a observat că dreptele $H\alpha, H\beta, H\gamma$ au direcţii simetrice faţă de laturile triunghiului — ele fac unghiuri egale sau suplimentare cu cele ale triunghiului, deci teorema *Noyer-Droz-Farny* se poate enunţa sub forma: *Paralelele* $H\alpha, H\beta, H\gamma$ *duse prin ortocentrul* H *a triunghiului* ABC *la dreptele cari unesc vârfurile* A, B, C *cu un punct* P *a cercului circumscris, tae laturile* BC, CA, AB *în trei puncte colineare.*

Această chestiune se mai poate enunța — dacă luăm ca triunghiu de referință cel format de centrele cercurilor exînscrise — în felul următor:

Paralelele din centrul cercului înscris la cevienele unui punct a cercului circumscris, determină pe laturile triunghiului, 3 puncte colineare. Această chestiune rezultă imediat din teorema dreptei lui *Simson*, căci într'un triunghiu A B C, M și N fiind 2 puncte oarecari, dacă paralelele din M la cevienele lui N determină pe laturile triunghiului A B C trei puncte colineare sau picioarele a 3 ceviene, atunci și paralelele din N la cevienele lui M determină analog pe laturile triunghiului 3 puncte colineare sau picioarele a 3 ceviene. Din cele spuse rezultă imediat următoarea chestiuni remarcabilă ca *transformată cosogonală a* teoremei *Noyer-Droz-Farny:*

M *fiind un punct pe cercul* A B C *și* $A_2 B_2 C_2$ *mijloacele arcelor* B C, C A, A B *perpendicularele din* I *pe* M A_2, M B_2, M C_2 *tae laturile triunghiului* A B C *în 3 puncte colineare* $A'_2 B'_2 C'_2$. *Paralelele din* I *la* M A_2, M B_2, M C_2 *tae laturile triunghiului* A B C *în trei puncte colineare* $A''_2 B''_2 C''_2$. *Mijloacele segmentelor* $A'_2 A''_2$, $B'_2 B''_2$, $C'_2 C''_2$ *sunt colineare.*

Totodată mai putem enunța și următoarele:

O dreaptă Δ *ce trece prin* I *tae cercurile* B I C, C I A, A I B *în* A_1, B_1, C_1 (I *fiind centrul cercului înscris în triunghiul* A B C). *Paralele din* A_1, B_1, C_1 *respectiv la* A I, B I, C I *sunt concurente într'un punct* M.

Când Δ *pivotează în jurul lui* I *simetricul lui* M *în raport cu* Δ *e pe cercul circumscris triunghiului* A B C.

Considerând două drepte perpendiculare Δ_1, Δ_2 *ce trec prin* I, *considerând punctele* M_1, M_2 *analog obținute relative la cele 2 drepte perpendiculare, sunt simetrice în raport cu punctul* I.

Aceste interesante chestiuni rezultă observând că M este ortopolul dreptei Δ în raport cu triunghiul având ca vârfuri centrele cercurilor exînscrise și ținând seamă că I este ortocentrul triunghiului ce are ca vârfuri centrele cercurilor exînscrise și aplicând următoarele observări ale d-lui *Goormaghtigh.*

Când o dreaptă Δ trece prin ortocentru, simetricul în raport cu Δ a ortopolului lui Δ aparține cercului celor 9 puncte.

Ținând seamă că cercul A B C e cerc *Euler* a triunghiului format de centrele cercurilor exînscrise, rezultă chestiunea 2-a; și cum ortopolurile a 2 drepte perpendiculare duse prin ortocentru sunt simetrice în raport cu ortocentrul și astfel rezultă și ultima chestiune.

Schimbând triunghiul de referință și anume ținând seamă că centrele I, I_1, I_2, I_3 cercurilor tritangente formează un grup ortocentric și luând succesiv ca triunghiu de referință $I I_3 I_2$ sau analoagele sale, rezultă alte chestiuni remarcabile.

MICU GRÜNBAUM

6. — *Asupra problemei 941.*

In cele ce urmează îmi propun a rezolva problema mai sus menționată, mai general:

Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\operatorname{tg} B - 1}{\operatorname{tg} 2C - 1} = \frac{\operatorname{tg} B + 1}{\operatorname{tg} 2C + 1}$$

unde între B *și* C *există relația:*

$$B + C = \frac{k}{2}\pi \ (k \text{ întreg}).$$

Voi considera două cazuri 1° k par. 2° k impar.

1°. Aducând ecuația la forma întreagă și simplificând găsim:

$$\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} 2C = 0$$

Insă:

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg}\left(\frac{k}{2}\pi - C\right) = -\operatorname{tg} C$$

deci:

$$\operatorname{tg} 2C + \operatorname{tg} C = 0$$

care făcută calculabilă prin logaritmini dă:

$$\frac{\sin 3C}{\cos C \cos 2C} = 0, \quad \text{de unde} \quad \sin 3C = 0$$

sau:

$$\sin C (3 - 4 \sin^2 C) = 0$$

deci:

$$\sin C = 0 \ \therefore \ C = 0^0 \ \therefore \ B = \frac{k}{2}\pi$$

$$3 - 4\sin^2 C = 0 \quad \therefore \quad \sin C = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad C = \frac{\pi}{3} \quad \therefore \quad B = \frac{3k-2}{6}\pi$$

$$C = -\frac{\pi}{3} \quad \therefore \quad B = \frac{3k+2}{6}\pi$$

2°. Aducând deasemenea ecuaţia la forma întreagă şi simplificând găsim:

$$\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} 2C = 0$$

însă:

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg}\left(\frac{k}{2}\pi - C\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} C}$$

deci:

$$\operatorname{tg} C \operatorname{tg} 2C - 1 = 0$$

care se mai poate scrie:

$$3\operatorname{tg}^2 C = 1,$$

de unde:

$$\operatorname{tg} C = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

deci:

$$C = \frac{\pi}{6} \quad \therefore \quad B = \frac{\pi}{6}(3k-1)$$

$$C = -\frac{\pi}{6} \quad \therefore \quad B = \frac{\pi}{6}(3k-1)$$

In cazul particular $k = 1$, avem soluţiile problemei 941

$$B = 60^0 \text{ şi } C = 30^0$$

EMILIAN MEREUTA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVII, No. 8, Aprilie 1932. Sur le point et la conique de *Frégier*. par *R. Goormaghtigh*. Triunghiuri „de laturi inverse", de *Căpitan Gh. Niculescu*. Generalizări ale sirului lui *Fibonacci*, de *I. B. Florescu*.

2. *Boletin Matematico Elemental*, ano III, No 1, Marso de 1932. Asupra problemei propuse 327, *D. Bustamante*.

3. *Cornelius Miklosi* (Dr. Inginer). Sur l'essai des courroies de commande. (Extrait du „Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara" 1927).

4. *Cornelius Miklosi*. (Dr. Inginer). Despre transmiterea mişcării de rotaţie prin curele şi angrenaje (litografiat).

5. *Cornelius Miklosi*. (Dr. Inginer). Rolul metalelor în uzine electrice moderne. (litografiat).

6. *Broşură de 16 pagini*. Cuprinde: 1°. Proporţionalitatea în geometrie, comunicare făcută de elevul *Dobrescu Şt.* 2°. Inmulţirea ambilor membii ai unei ecuaţii, cu aceiaşi cantitate, comunicare făcută de elevul *Chiriac I.*

Ambele comunicări s'au făcut la liceul militar Iaşi, sub conducerea d-lui profesor *V. Teodoreanu*.

Insemnăm cu plăcere accst mod de manifestare a elevilor din liceele noastre.

PROBLEME REZOLVATE

442. — *Să se găsească limita expresiunei.*

$$E = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + \ldots + \sqrt{x^{2^n}}}}} + \sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2 + \sqrt[4]{x^8 + \sqrt[4]{x}}}}$$

când x tinde la infinit.

STEFAN MUSTA

Impărţind ambii termeni prin $x^{\frac{1}{2}}$ găsim

$$E = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x^{2^n}}}}}}} - 1}{\sqrt[4]{1 + \sqrt[4]{1 + \sqrt{\frac{1}{x^{31}}}}}}$$

Rezultă de aci că pentru $x = \infty$, obţinem:

$$\lim_{x=\infty} E = \frac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt[4]{2}}$$

Soluţie dată de d-ra *Blasko Beatrix* şi d-l *Dănciulescu Gr. Virgiliu.*

485. — *Să se calculeze pentru $x = 0$, limita expresiei:* [1]

$$E = \frac{(1 + a\sin x)^{\frac{1}{x}} - e^a}{\sin 2x}$$

V. ALACI

Fiindcă:

$$(1 + a\sin x)^{\frac{1}{x}} = \left[(1 + a\sin x)^{\frac{1}{a\sin x}}\right]^{a\frac{\sin x}{x}},$$

[1]) Enunţ rectificat.

rezultă că:

$$\lim_{x=0} (1 + a \sin x)^{\frac{1}{x}} = e^a,$$

şi deci expresia dată se reduce pentru $x = 0$ la forma nedeterminată $\frac{0}{0}$.

Pentru a ridica această nedeterminare, putem aplica regula lui *Hôpital* şi avem:

$$E = \lim_{x=0} \frac{(1+a\sin x)^{\frac{1}{x}} \left[a\cos x - \frac{1}{x^2}(1+a\sin x) \operatorname{L}(1+a\sin x) \right]}{2\cos 2x}$$

$$= \lim_{x=0} \frac{(1+a\sin)^{\frac{1}{x}-1} \left[a x \cos x - (1+a\sin x) \operatorname{L}(1+a\sin x) \right]}{2x^2 \cos 2x}$$

$$= \lim_{x=0} \frac{(1+a\sin x)^{\frac{1}{x}}}{2(1+a\sin x)} \lim_{x=0} \frac{a x \cos x - (1+a\sin x) \operatorname{L}(1+a\sin x)}{x^2 \cos 2x}$$

$$= \frac{e^a}{2} \lim_{x=0} \frac{a x \cos x - (1+a\sin x) \operatorname{L}(1+a\sin x)}{x^2 \cos 2x}$$

Cum pentru $x = 0$ factorul a 2-lea ia forma $\frac{0}{0}$, aplicăm din nou teorema lui *Hôpital* şi avem:

$$E = \frac{e^a}{2} \lim_{x=0} \frac{a\cos x - a x \sin x - a\cos x \operatorname{L}(1+a\sin x) - a\cos x}{2x\cos 2x - 2x^2 \sin 2x}$$

$$= -\frac{a e^a}{4} \lim_{x=0} \frac{x\sin x + \cos x \operatorname{L}(1+a\sin x)}{x\cos 2x - x^2 \sin 2x}$$

Factorul al 2-lea pentru $x = 0$, luând forma $\frac{0}{0}$ aplicăm din nou teorema lui *Hôpital* şi avem:

$$E = -\frac{a e^a}{4} \lim_{x=0} \frac{\sin x + x\cos x - \sin x \operatorname{L}(1+a\sin x) + \frac{a\cos^2 x}{1+a\sin x}}{\cos 2x - 4x \sin 2x - 2x^2 \cos 2x}$$

De aci rezultă:

$$E = -\frac{a^2 e^a}{4},$$

care este limita expresiunii date.

Soluţii date de d-nii: *Botea Nicolae, Dărmănescu I., Panţu Z. I. şi Ţanovici C.*

537. — *Dacă* $n = mult.\, 6 + 1$, *atunci polinomul:*

$$(x+1)^n - x^n - 1,$$

este divizibil prin, $(x^2 + x + 1)^2$.

(†) I. CRACIUNESCU

Dacă însemnăm:

$$P = x^2 + x + 1,$$

$$(x+1)^n - x^n - 1 = (P - x^2)^n - x^n - 1 = P^n - C_n^1 P^{n-1} x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} P x^{2n-2} + (-1)^n x^{2n} - x^n - L = P\left[P^{n-1} - C_n^1 p^{2-n} + \cdots + (-1)^{n-2} C_n^{n-1} x^{2n-2}\right] + (-1)^n x^{2n} - x^n - 1$$

Cum $n = 6p + 1$, avem:

$$(1)\quad (x+1)^n - x^n - 1 = P.\,Q(x) - (x^{12p+2} + x^{6p+1} + 1)$$

Să dovedim acum, că: $x^{12p+2} + x^{6p+1} + 1$ se divide prin $x^2 + x + 1$,

Pentru această observăm că ecuaţia:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

are rădăcinele:

$$1,\quad \alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\quad \alpha^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

şi deci α este o rădăcină a ecuaţiei: $x^2 + x + 1 = 0$, adică:

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

Pentru $x = \alpha$, avem:

$$x^{12p+2} + x^{6p+1} + 1 = (x^3)^{4n} \alpha^2 + (x^3)^{2n} + 1 = \alpha^2 + \alpha + 1 = 0,$$

deci α este o rădăcină a ecuaţiei:

$$x^{12p+2} + x^{6p+1} + 1 = 0,$$

şi deci şi conjugata sa α^2 este o rădăcină a acestei ecuaţii. Rădăcinele ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$, sunt deci şi rădăcini a ecuaţiei:

$$x^{12p+2} + x^{6p+1} + 1 = 0,$$

deci polinomul:

$$x^{2n} + x^n + 1 = x^{12p+2} + x^{6p+1} + 1,$$

se divide prin:

$$P = x^2 + x + 1,$$

şi atunci privind relaţia (1), conchidem că poli-

nomul $(x+1)^n - x^n - 1$, se divide prin x^2+x+1.

Pentru a dovedi însă că, $(x+1)^n - x^n - 1$, $(n = 6p+1)$, se divide prin $(x^2+x+1)^2$, rămâne a dovedi că derivata polinomului dat, care este

$$n\left[(x+1)^{n-1} - x^{n-1}\right]$$

se divide prin:

$$P = x^2 + x + 1$$

Putem scri:

$$(2) \quad (x+1)^{n-1} - x^{n-1} = (P - x^2)^{n-1} - x^{n-1} =$$

$$P.\,Q_1(x) + (-1)^{n-1} x^{2n-2} - x^{n-1}$$

$$= P.\,Q_1(x) + x^{2n-2} - x^{n-1}, \text{ căci } n \text{ este impar.}$$

Pentru $x = \alpha$, avem:

$$x^{2n-2} - x^{n-1} = \alpha^{12p} - \alpha^{6p} = (\alpha^3)^{4p} - (\alpha^3)^{2p} =$$

$$1 - 1 = 0,$$

ceia ce dovedeşte că:

$$x^{2n-2} - x^{n-1}$$

admite rădăcina α deci şi pe conjugata sa α^2, adică se divide prin:

$$P = x^2 + x + 1$$

Privind relaţia (2), conchidem că polinomul:

$$(x+1)^{n-1} - x^{n-1}$$

se divide prin, $P = x^2 + x + 1$.

Aşa dar polinomul:

$$(x+1)^n - x^n - 1, \quad (n = 6p+1)$$

şi derivata lui divizându-se fiecare prin x^2+x+1, rezultă că polinomul dat se divide prin $(x^2+x+1)^2$.

Observare. Această problemă se găseşte şi în „Algebra" de cl. VIII, a d-lui *P. Marinescu,* după cum a fost observat de mulţi din corespondenţi.

Soluţii date de d-nii: *Arsene Alexandru* (lic Milit., Iaşi), *Bârs Petre* (lic, Sibiu), *Cioclov Gh. Gheorghe* (lic., Turnu-Severin), *Costăchescu V. C.* (lic. Milit., Iaşi) *Craiu N. Ioan* (lic., Piteşti), *Crăciunescu N. Eugen* (Craiova), *Dumitrescu I. Eugen* (lic, Buzău), *Duport George* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic., Galaţi), *Iancu D.* (lic. Naţional, Iaşi), *Manolescu I. Nicolae* (Focşani), *Marinescu N. N.* (lic. Milit, Iaşi), *Novacu Valeriu* (lic., Arad), *Panţu Z. I.* (lic Lazăr, Bucureşti), *Patran T. N.* (lic. Milit., Iaşi), *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Savin Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Popescu N. Corneliu* (Caracal), *Popescu E. Eugen, Popescu C. Virgiliu* (lic., Târgovişteа), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R-Sărat), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Segărceanu D. C.* (Craiova), *Sprinceană Gheorghe* (lic., Galaţi), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Simionov P. Kindin* (Tulcea), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vladimirschi Veniamin* (lic., Tighina), *Winckler Alfred* (Semin. Pedagogic, Iaşi), *Zagaican Ilie* (Şc. de Conductori, Chişinău) şi *Zaharia O. N.* lic., Constanţa).

544. — *Se dă ecuaţia:*

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

cu rădăcinele $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$. *Să se demonstreze că, pentruca suma produselor luate câte două a rădăcinelor* $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ *să fie zero, trebuie ca* α_1 *să fie o rădăcină a ecuaţie:*

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

V. ALACI

Fie S suma produselor câte două a rădăcinelor $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$, adică:

$$S = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_2\alpha_m + \alpha_3\alpha_4 + \ldots + \alpha_{m-1}\alpha_m$$

Dacă adunăm şi scădem în membrul al 2-lea, expresia $\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m)$, putem scri:

$$(1) \quad S = (\Sigma\,\alpha_1\alpha_2) - \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m) =$$

$$(\Sigma\,\alpha_1\alpha_2) - \alpha_1[(\Sigma\,\alpha_1) - \alpha_1]$$

Privind ecuaţia dată de gradul m şi ţinând seamă de relaţiile cunoscute dintre rădăcini şi coeficienţi, relaţia (1) devine:

$$S = \frac{a_2}{a_0} - \alpha_1\left(-\frac{a_1}{a_0} - \alpha_1\right)$$

Pentru ca S să fie zero, trebuie să avem:

$$\frac{a_2}{a_0} - \alpha_1\left(-\frac{a_1}{a_0} - \alpha_1\right) = 0,$$

sau:

$$a_0\alpha_1^2 + a_1\alpha_1 + a_2 = 0$$

Deci pentru ca S să fie zero, trebuie ca α_1 să fie o rădăcină a ecuaţiei:

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0,$$

tocmai cum ni se cere prin enunţ.

Soluţii date de d-nii: *Antoniu V.* (lic., Cluj), *Atanasiu C-tin* (student, Şc. Polit., Timişoara), *Bârs D. Petre, Călniceanu Gh.* (lic., Timişoara), *Călin M. Gh.* (lic., Caracal), *Costăchescu V. C-tin, Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova) *Diaconescu V. Teodor* (lic., Craiova), *Drăgan G.* (absolvent, Braşov), *Drâmba N. C-tin* (lic., Galaţi), *Dumitrescu I. Eugen, Duport George* (lic. Sava, Bucureşti), *Faibovici Henri* (Craiova), *Fayon Albert* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Florea N. Gheorghe* (lic.

Carol, Craiova), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Gheorghiu Victor* (lic., Tg.-Jiu) *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Iacob St. Eugen, Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Manolescu I. Nicolae* (Focşani), *Marinescu N. N.* (lic. Milit., Iaşi), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Morţun Emil* (Bucureşti), *Muster H. D-tru* (Seminarul-Pedagogic, Bucureşti), *Nestor D.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Novacu Valeriu* (lic., Arad). *Pantazi M. Alexandru* (lic., Galaţi), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Patron Th. N.* (lic. Milit., Iaşi), *Popescu N. Corneliu* (Caracal), *Popescu C. Virgiliu* (Târgovişstea), *Popovici Th. Ioan* (Şc. Polit, Bucureşti), *Rădulescu C. M.* (lic. R.-Sărat), *Segârceanu D. C.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Simionov P. Kindin* (lic, Tulcea), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit, Iaşi), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ţanonici V. C-tin* (Şc. Polit, Timişoara), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sava, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic., Timişoara), *Vladimirschi Veniamin* (lic., Tighina), *Vlădea Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Winckler Alfred* (Seminarul-Pedagogic, Iaşi) şi *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic., Piteşti).

Observare. Mulţi din corespondenţii de mai sus, sunt azi cu studiile terminate.

1040. — *Să se găsească restul împărţirii prin 9 a numărului* 73^{729}.

SUB-LT ION C. VONICA

Se observă că:

$$73 = \text{mult. } 9 + 1,$$

deci:

$$73^{729} = (\text{mult. } 9 + 1)^{729} = \text{mult. } 9 + 1.$$

Restul căutat este 1.

Soluţii date de d-nii: *Acikgheozian Nubar* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Boeriu P. George* (lic., Oltenita), *Dan T. Traian* (lic., Beiuş), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Dobos Ernest* (Student, Cluj), *Ivănescu Cezar* (lic., Bârlad), *Lascu Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mehedinţi D. D-tru* (lic. Milit. Tg-Mureş), *Mercuţă Emilian*, *Motoc D. Mircea* (lic., Oltenita), *Pop I. Leontin* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa Gh. Ioan* (student, Bucureşti), *Popescu C. Ştefan* (lic., Milit., Craiova), *Purcel Atanasie* (Sc. Polit, Timişoara), *Şerban Teodor*, *Tăutu Ştefan* (lic., Roman), *Ţica P. Marin* (bacalaureat) şi *Trică S. Ioan* (Constanţa).

1042. — *Se dă ecuaţia:*

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0,$$

cu rădăcinele x_1, x_2, x_3. *Fără a rezolva această ecuaţie, se cere să se formeze o altă ecuaţie de gradul al treilea, cu rădăcinele:*

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}, \quad y_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}, \quad y_3 = x_3 + \frac{1}{x_3}$$

CEZAR IVANESCU

Privind ecuaţia dată şi scriind relaţiile cunoscute între rădăcini şi coeficienţi, avem:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 11 \\ x_1x_2x_3 = 6 \end{cases}$$

Să construim acum o ecuaţie de gradul al 3-lea în y, ale cărei rădăcini sunt y_1, y_2, y_3. Este necesar pentru aceasta să calculăm suma, suma produselor câte două şi produsul acestor rădăcini.

Conform enunţului putem scri succesiv, având în vedere relaţiile (1):

$$y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} =$$

$$6 + \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = 6 + \frac{11}{6} = \frac{47}{6}$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) +$$

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_3 + \frac{1}{x_3}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_3 + \frac{1}{x_3}\right) =$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} +$$

$$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} =$$

$$11 + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} +$$

$$\frac{x_1 + x_2}{x_3} = 11 + 1 + \frac{6 - x_1}{x_1} + \frac{6 - x_2}{x_2} +$$

$$\frac{6 - x_3}{x_3} = 12 + 6\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) - 3$$

$$= 9 + 6\frac{11}{6} = 20$$

$$y_1y_2y_3 = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_3 + \frac{1}{x_3}\right) =$$

$$x_1x_2x_3 + \frac{1}{x_1x_2x_3} + \frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_1x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2} +$$

$$\frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_1x_3}{x_2} + \frac{x_2x_3}{x_1} = 6 + \frac{1}{6} +$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1x_2x_3} + \frac{x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2}{x_1x_2x_3} = \frac{37}{6} +$$

$$\frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}{6} +$$

$$\frac{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)}{6}$$

$$=\frac{37}{6}+\frac{36-22}{6}+\frac{121-72}{6}=\frac{50}{3}$$

Astfel am găsit:

$$(2)\quad \begin{cases} y_1+y_2+y_3=\dfrac{47}{6} \\ y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=20 \\ y_1y_2y_3=\dfrac{50}{3} \end{cases}$$

In virtutea relaţiilor (2), putem acum uşor forma ecuaţia de gradul al 3-lea, cu rădăcinele y_1, y_2, y_3. Aceasta ecuaţie este:

$$y^3-\frac{47}{6}y^2+20y-\frac{50}{3}=0,$$

sau:

$$6y^3-47y^2+120y-100=0.$$

Soluţii date de d-nii: *Acikgheozian N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Boerescu P. G. I.* (lic. Oltenita), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Dan T. Traian* (lic. Beiuş), *Dăscălescu St. Hristache* (student, Bucureşti), *Fofiu Cornel* (lic. Beiuş), *Ioanin C. Gh.* (lic. Carol, Craiova), *Lascu Ioan* (lic. Milit. Craiova), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit. Timişoara), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mereuţa Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Motoc D. Mircea* (lic Oltenita), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Pănoiu Emanoil* (lic. Carol, Craiova), *Păunescu N.* (lic. Milit. Craiova), *Pop Leontin* (Şc. Polit. Timişoara), *Popa B. Ioan* (Şc. Polit. Timişoara), *Popescu I. Alexandru* (Şc. Polit. Timişoara), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit. Craiova), *Predoescu I. M.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Predoiu Fl.* (Şc. Navală), *Purcel At.* (Şc. Polit. Timişoara), *Serban Teodor, Sova C. Ioan-Grigoreni* (Şc. Milit. de Geniu) şi *Trică S. Ioan* (Constanţa).

1045. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\cos 3\alpha=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\left[4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-6\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cos\alpha+3\cos 2\alpha\right]$$

V. ALACI

Observăm că:

$$(1)\quad \sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}{2}$$

Notând cu E membrul al 2-lea al identităţei date şi ţinând seamă de (1), avem:

$$E=(\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha)[\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha-2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha+3\sqrt{3}\cos\alpha\sin\alpha+3\cos 2\alpha]$$

sau:

$$E=(\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha)(\cos^2\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha\sin\alpha)=\cos\alpha(\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha)=4\cos^2\alpha-3\cos\alpha=\cos 3\alpha$$

Astfel identitatea dată este stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Acikgheozian Nubar* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Coandă Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Contantin Petre* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Dan T. Traian* (lic., Beiuş), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Dobos Ernest* (student, Cluj), *Fofiu Cornel* (lic., Beiuş), *Gheţie Coriolan, Grinberg N. Meer* (student, Iaşi), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ivănescu Cezar* (l c., Bârlad), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emilian, Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Nenciulescu Hariton* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Parepeanu C. I.* (Şc. Milit. de Geniu), *Popa Gh. Ioan* (student, Bucureşti), *Popescu I. Alexandru* (Şc. Polit., Timişoara), *Reghiş Pavel* (lic., Beiuş), *Şavovici Florentin* (lic. Milit, Tg.-Mureş), *Sova C. Ioan* (Şc. Milit. de Geniu), *Stoicescu I. Ernest* (Şc. Milit. de Geniu) şi *Trică S. Ioan* (Constanţa).

Soluţia autorului. Considerăm ecuaţia:

$$(1)\quad x^3-3\cos\alpha\cdot x^2+3\cos\alpha\cdot x-\cos 3\alpha=0$$

cu rădăcinele:

$$x=\frac{\sin\left[\dfrac{(2k-1)\pi}{6}-\alpha\right]}{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{6}},\quad k=0,1,2$$

(R. M. T. An XI, No. 3, pag. 28).

Pentru, $k=1$, avem rădăcina:

$$x=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right),$$

pe care substituind'o în însuşi ecuaţia (1), o transformă într'o identitate, care uşor se poate scri:

$$\cos 3\alpha=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\left[4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-6\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cos\alpha+3\cos 2\alpha\right],$$

şi este tocmai identitatea cerută.

1047. — *Să se găsească patratul perfect de forma a b c d ştiind că numărul format de cifrele a treia şi a patra e un patrat perfect şi că numărul format de cifra întâia, a doua şi a treia este iarăşi un patrat perfect, care are suma cifrelor sale egală cu cifra a patra a patratului cerut.*

MIRCEA CONSTANTINESCU

$c\,d$ fiind patrat perfect, poate fi: 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81. Deoarece, $a+b+c=d$, deci $d>c$, rezultă că nu vom considera din şirul de mai sus de cât acele patrate care au cifra unimilor mai mare ca a zecilor, adică: 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49. Deci, c ar putea fi:

(1) $$0, 1, 2, 3, 4.$$

Insă conform enunţului $a\,b\,c$ este patrat perfect, aşa că din şirul (1) nu putem lua pentru c de cât valorile 0, 1, 4, iar $c\,d$ poate fi atunci: 01, 04, 09, 16, 49. Cum $a\,b\,c$ este patrat perfect, ţinând seamă de ultimele două cifre ale unui patrat perfect, anume: 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96, rezultă că în cazul $c\,d=01, 04, 09$, nu putem lua pentru b de cât valoarea 0 şi fiindcă avem; $a+b+c=d$, rezultă că $a\,b\,c\,d$ ar fi acest caz: 1001, 4004, 9009. Dintre aceste numere, nici unul nu este patrat perfect. Luăm, $c\,d=16$ şi ţinând seamă de terminaţiile de două cifre ale unui patrat perfect scrise mai sus, rezultă că b ar putea fi 0, 2, 4, căci $b<d$. Cum, $a+b+c=d$, rezultă că $a\,b\,c\,d$ ar putea fi 5016, 3216, 1416. Dintre aceste numere însă, nici unul nu este patrat perfect. Considerăm, $c\,d=49$. In acest caz b poate fi, 0, 2, 4 căci $b+c<d$, şi cum, $a+b+c=d$, rezultă că numărul $a\,b\,c\,d$ ar putea fi: 5049, 3249, 1449. Dintre acestea însă numai 3249 e patrat perfect

$$3249=57^2,$$

şi ne dă singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-nii: *Boerescu P. George* (lic. Oltenita), *Boeriu Valer* (Şc. Polit., Timişoara), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Chircă I. Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Chirilă Andreiu* (lic. Timişoara), *Constantin Petre* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Dan T. Traian* (lic. Beiuş), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Ioaniu C. Gh.* (lic. Carol, Craiova), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Landmann Ş* (Tighina), *Lăţea P, C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mehedinţi D. D-tru* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Mereuţă Emilian, Motoc D. Mircea* (lic. Oltenita), *Nagler Meyer* (lic. Naţional, Iaşi), *Pănoiu Em.* (lic. Carol, Craiova), *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Pop Leontin* (Şc. Polit., Timişoara), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Roşca Şt. Veronica* (Craiova), *Savovici Florentin* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Stan Ioan* (lic., Roman), *Stoica G. I* (Sub.-Lt), *Stoicescu I. Ernest* (Şc. Milit. de Geniu), *Trică Ioan* (Constanţa) şi *Zane D. Nicolae*.

1048. — *Să se găsească patratul perfect de forma:*

$$N=a\,82\,b\,2\,c\,5,$$

care să fie multiplu de 3 şi 11; să se determine apoi baza sistemului de numeraţie în care numărul $a\,b\,c\,5$ este 5829.

C-TIN D. RUSU

N fiind patrat perfect şi terminat cu 5 rezultă că penultima cifră este 2, deci:

$$N=a\,82\,b\,225$$

Acest număr fiind divizibil cu 3, este şi cu 9 fiind patrat perfect, trebuie deci să avem:

$$a+8+2+b+2+2+5=\text{mult. } 9,$$

sau:

(1) $$a+b=\text{mult. } 9-1$$

Tot N fiind divizibil şi cu 11, trebuie să avem:

$$5+2+2+a-2-b-8=\text{mult. } 11,$$

sau:

(2) $$a-b=\text{mult. } 11+1.$$

Ţinând seamă că a şi b sunt de o cifră, relaţiile (1) şi (2) se reduc la sistemele:

$$\begin{cases} a+b=8 \\ a-b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b=17 \\ a-b=1 \end{cases}$$

Primul sistem nu ne dă valori întregi pentru a şi b. Al 2-lea sistem ne dă însă:

$$\begin{cases} a=9 \\ b=8 \end{cases}$$

Rezultă:

$$N=9828225$$

care fiind şi patrat perfect, căci:

$$N=9828225=3135^2,$$

ne dă patratul cerut.

Trecem la a 2-a parte a problemei.

Să găsim baza sistemului de numeraţie, în care $a\,b\,c\,5=9825$, este 5829.

Ţinând seamă de modul cum putem trece de la un număr scris într'o bază oarecare la altul din baza zecimală, avem:

$$5x^3+8x^2+2x+9=9825,$$

sau:

$$5x^3+8x^2+2x-9816=0,$$

care se poate scri:

$$(x-12)(5x^2+68x+818)=0$$

Rădăcinele acestei ecuaţii sunt:

$$x_1=12$$

x_2 şi x_3, imaginare.

Deci baza sistemului de numeraţie cerut este 12.

Soluţii date de d-nii: *Acikgheozian Nubar* (lic Spiru-Haret, Bucureşti). *Boeriu Valer* (Şc. Polit., Timiş ara), *Landmann Ş.* (Tighina), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mehedinţi D D-tru* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Stoicescu I. Ernest* (Şc. Milit. de Geniu) şi *Trică Ioan* (Constanţa).

PROBLEME PROPUSE

1096. — Să se găsească bipatratul $abcde$ în care be şi acd sunt bipatrate.

MARIN P. TICA

1097. — Se cere patratul perfect $abcd$ în care produsul cifrelor de rang par, întrece cu o unitate pe acel al cifrelor de rang impar; câtul diviziunii numărului cd prin diferenţa cifrelor sale, întrece cu patrusprezece unităţi câtul diviziunii aceluiaşi număr prin suma cifrelor sale.

CEZAR IVANESCU

1098. — Se dă triunghiul echilateral ABC şi cercul său circumscris O. Fie M un punct oarecare luat pe latura AC a triunghiului şi N punctul unde dreapta BM taie cercul. Să se demonstreze că raportul:

$$\frac{\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cdot\overline{NC}+\overline{AM}\cdot\overline{NC}^2}{\overline{BN}\cdot\overline{MN}},$$

este constant.

C-TIN P. LATEA

1099. — Fie s_1, s_2, s_3, s respectiv, aria triunghiului ortic, aceea a triunghiului format din centrele cercurilor exînscrise, aria triunghiului median şi suprafaţa triunghiului de referinţă. Să se stabilească relaţia:

$$\frac{s_1}{s_2}\cdot\frac{s}{s_3}=\frac{2r}{R}(1-\Sigma\cos^2 A),$$

celelalte notaţii fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

MARIUS MARGULIUS

1100. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z-xy-xz-yz+xyz=16 \\ (x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2=200 \\ \Sigma(x^3-1)(y-1)(z-1)=1065 \end{cases}$$

M. N. GRINBERG

1101. — Dacă q este un întreg mai mare de cât 3, să se stabilească identitatea:

$$\begin{vmatrix} I_3^q & I_3^{q-1} & I_3^{q-2} \\ I_3^{q-1} & I_3^{q-2} & I_3^{q-3} \\ I_3^{q-2} & I_3^{q-3} & I_3^{q-4} \end{vmatrix}$$

ştiind că I_p^i înseamnă combinări cu repetiţie a p obiecte luate câte i.

V. ALACI

1102. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sin x+\sin y+\sin z=\dfrac{3+\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{cosec} x+\operatorname{cosec} y+\operatorname{cosec} z=3+\sqrt{2} \\ \Sigma\cos^2 x(\sin y+\sin z)=\dfrac{12-3\sqrt{2}}{8}+3\sin x\sin y\sin z \end{cases}$$

IOAN S. TRICA

1103. — Să se arate că în orice triunghiu avem relaţia:

$$\frac{a\operatorname{tg}\frac{A}{2}+b\operatorname{tg}\frac{B}{2}+c\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{2\left(\sqrt[2^n]{2R}-\sqrt[2^n]{r}\right)}=\sum_{n=1}^{n}\left(\sqrt[2^n]{2R}+\sqrt[2^n]{r}\right)$$

ION MARGINEANU

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și *J. Tschlek,* Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann,* La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale,* Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez,* Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell,* Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff,* Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera,* S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky,* Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler.* Washington (Statele Unite), *J. Shohat,* Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville,* Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault,* Le Mans (Francia), *O. Szász,* Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti,* Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XII. 15 IUNIE 1932 NO. 4.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 N. O. ZAHARIA NOTE PE MARGINEA FILOSOFIEI LUI NEWTON.
2. NOTE MATEMATICE: 7, 8.
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 156, 157, 1049, 1050, 1053, 1054.
5. PROBLEME PROPUSE: 1104-1112.
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Prof. **C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XII — No 4 TIMISOARA, 15 IUNIE 1932

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

NOTE PE MARGINEA FILOSOFIEI LUI NEWTON

de N. O. ZAHARIA

I.

In stabilirea unei legi, unui adevăr ce concentrează sub unghiul generalității fenomene științifice originar înrudite, legându-le indisolubil prin stigmatul analogiei funcțiunii lor în angrenajul complex al domeniului căruia aparțin, — două sunt elementele de bază ce prezidă la fundarea sa: materialul cercetărilor experimentale — empiricul — și reflexia filosofică. Experiența a fost întotdeauna un instrument de discernământ imediat. Când asupra unui fapt științific oarecare există îndoială în ceeace privește veriditatea lui, se recurge la experiență pentru a se confirma această veriditate, în cazul când rezultatul experienței este afirmativ, sau se edictează înlăturarea supoziției făcute, atunci când experiența n'o confirmă. Experiența, practicată cu preciziune, a dat în științele naturale rezultate strălucite, și prin exces de încredere s'a acordat de către unii (ce poartă numele de empiriști) acestui instrument de control științific, atestatul pretențios de unică și infailibilă metodă. In cazul acesta se renunță la orice reflexiune filosofică, dacă nu pentru faptul că ea introduce elemente noi, cel puțin ca o consecință a monopolului exercitat de experiență, monopol care respinge orice ajutor dinafară, ca fiind inutil. Lăsând la o parte nuanța de intransigență nu tocmai științifică, marcată prin acest fel de a judeca, se mai naște o întrebare: orice experiență ce ne-o propunem, este posibilă? Nu cumva sunt și experiențe ce nu se pot efectua, sau, nu există cazuri în cari nu ne putem hotărî pe ce cale să îndrumăm o anume experiență? Evident că da. Și atunci cercetătorul e silit să recurgă la ipoteze, mai mult sau mai puțin indreptățite de experiențe de aproximație relativă, lipsite de precizie, ajungându-se chiar la convenții de natură pur filosofică, neavând nici o legătură cu lumea concretă, — cum, de pildă, au făcut nominaliștii cu noțiunile și propozițiile fundamentale ale matematicilor.

Pentru anumite spirite ce privesc de departe și unilateral, e o încongruență manifestă între cercetarea empirică și reflexia filosofică; privind mai de aproape însă, această incongruență dispare. In special, acei cari fac să se vadă mai bine cât de nefundată e prima credință, sunt acei cari în acelaș timp întrunesc în aceeași persoană pe cercetătorul empiric și filosof. Când se păstrează constant deosebirea dintre un domeniu și celălalt, cu alte cuvinte se respectă esențialul fiecăruia și caracteru-i deosebit, dar numai atât, — se naște un proces cu mult mai interesant și în acelaș timp fericit, al sintetizării și complectării prin colaborare. — Cercetarea experimentală se sprijină pe temelii proprii și-și durează casa sa. In câmpul fenomenelor naturale, dreptul de regisare îi revine, în primul rând. E un domeniu de funcțiuni și valori bine definit, nu însă fără relații axiale cu categorii din afară.

Eșalonate longitudinal după axe comune, cele două elemente pomenite mai sus — empericul și reflexia filosofică — se concep ușor ieșite din izolarea claustrală care nu le este nicidecum proprie și alunecând către acelaș punct de contingență ce stabilește o continuitate de complectare. Punctul acesta nu este un punct geometric, domeniile amintite nu se întâlnesc tangențial (în înțeles abstract — matematic), ci se țese o plasă de tentacule distincte unele de altele, fiecare păstrându-și caracteru-i deosebit, șlefuit ca pentru un mediu nou, dar niciodată unele confundându-se cu celelalte;

complectare da, dar nu confuzie, asimilare, înlocuiri şi suplineri — ceeace ar putea duce numai la compromiterea încercării de apropiere.

O complectare se poate face, fie atribuind rolul de bază materialului empiric, fie reflexiunii filosofice. Din aceste două posibilităţi derivă două rezultate finale deosebite în ceeace priveşte unghiul sub care se reflectă ansamblul rezultatelor câştigate şi forma sub care aceste rezultate sunt admise. Când la baza construcţiei unei ştiinţe situăm normele şi metodele filosofice menite să dirijeze cercetările de ordin pur technic, ştiinţa capătă un aspect de necesitate şi universalitate logică. In procesul invers, experinţa cere reflexiei filosofice răgazul strângerii unui material suficient şi numai după aceea nevoia de sistematizare şi de epurare o îndeamnă la o conlucrare.

II.

In matematici lucrurile se petrec întocmai cum le-am expus — în linii generale — mai sus, — şi poate că aci, mai mult ca în oricare altă ştiinţă, problema conlucrării reflexiei filosofice cu technica practică a exerciţiului logic, a demonstrării teoremelor particulare, nu a lipsit niciodată din preocupările marilor matematiciani şi filosofi din toate timpurile. Din filosofia eleată este destul să desprindem poziţia pe care *Platon* a adoptat-o faţă de această problemă. E lucru prea cunoscut faptul că *Platon* a construit o filosofie matematică ce caută să se substitue oricărei metafizici; sau mai bine, că a imaginat metafizica sinonimă cu filosofia matematică. După *Platon,* ca şi după *Euclide* dealtfel, noţiunile de cantitate şi măsură nu au ce căuta în matematici, ele fiind caractere specifice şi aparţinând exclusiv ştiinţelor naturale. Grecii vechi au comis aceeaşi greşală pe care mai târziu, în timpurile moderne — situaţi într'un punct diametral opus acestora — o vor comite empiriştii. *Platon* nu numai că face abuz excesiv de filosofie în ceeace priveşte fundamentele matematicilor, dar el suspendă în totul partea technică, partea lor pozitivă, înlocuind-o cu o subtilă dialectică ce trădează un viu interes pentru o logică ce depăşeşte domeniul strict al matematicilor. Consecinţele acestui exces de încredere în atotputernicia şi universalitatea exclusivă a logicei în matematici s'au ivit imediat. Mult timp, concepţia fundării matematicilor pe baze filosofice a fost părăsită şi sistemul lui *Platon* compromis. Evident că o construcţie atât de monumentală ca opera lui *Platon* nu putea totuş să înceteze de a mai prezinta vreun interes; cuprindea prea multe părţi bune, şi condamnarea ei nu putea fi pronunţată pentru greşeli (inerente oricărui spirit al epocii sale) ce puteau fi îndreptate. *Platon* a transpus întregul domeniu al matematicilor într'o lume transcendentală, a cărei frumuseţe şi armonie grandioasă nu i-a dat putinţa unei cercetări mai obiective. După el, toţi acei cari au făcut incursiuni de durată şi însemnătate mai mult sau mai puţin remarcabile pe terenul filosofiei matematice, au căutat pe cât le-a fost posibil să întrezărească şi să evidenţieze tocmai această obiectivitate, — şi să stabilească o echitate în raporturile dintre elementele recunoscute în desechilibru.

Descartes marchează în această privinţă o etapă importantă şi un pas sigur câştigat. Cu puterea-i de raţiune, excepţională, acest mare geometru care este în acelaş timp şi părintele filosofiei moderne [1]) a închegat un sistem filosofic, care a strâns apoi în jurul său, creîndu-se o şcoală denumită *cartezianism*, pe mulţi gânditori de frunte. — In filosofia lui *Platon* nu există decât o singură clasă de adevăruri, cele metafizice. In privinţa aceasta *Descartes* se depărtează de *Platon,* împărţind adevărurile în două: cele ce se obţin cu ajutorul experienţei sau raţionamentului (după toate regulele şi preceptele logicei formale) — şi adevărurile metafizice. Pe acestea din urmă le plasează *Descartes* la baza oricăror cercetări, la baza tuturor adevărurilor, indiferent cum acestea au fost câştigate. E atitudinea omului de ştiinţă, dublat de filosof, care caută un echilibru gândirii sale; şi filosoful din *Descartes,* numai atunci concede dreptul de intervenţie omului de ştiinţă, când îşi ştie asigurat, câştigat, terenul de bază, rolul de regisor, acţionând după îndemnurile şi conform adevărurilor metafizice. *Descartes* pune mai presus ca orice sentimentul de ordine şi metodă ge-

[1]) Ba mai mult, în Germania, chiar astăzi, singur *Descartes* este recunoscut ca un într'adevăr remarcabil filosof francez şi numai el se bucură de simpatia neprecupeţită a filosofilor germani.

nerală ; orice nouă proprietate va trebui să accepte o înverigare logică în lanțul demonstrațiilor anterioare, contribuind la construcția unui tot armonios care va trebui să fie *matematica universală.* Munca de căpetenie era prin urmare stabilirea afinităților congenitale ale propozițiilor, caracter care înlesnea operația de eșalonare amintită. Ceeace te izbește în primul rând în filosofia carteziană este ordinea desăvârșită, continuu susținută.

In contradicție cu *Descartes*, deși își însușește foarte adesea concepțiile filosofice ale acestuia, *Newton* nu e un metafizician doctrinar. *Newton* nu admite un recurs al științei în general, la postulatele metafizicei. Scopul său, ca om de știință, a fost să fundeze această disciplină exclusiv pe experiență și calcul. Postulatele și axiomele sale sunt explicate experimental, nu metafizic. Cu toate acestea există și o metafizică newtoniană, sau mai bine zis, există o definiție dată de acesta rolului pe care-l poate juca în creația și închegarea, teoremelor și domeniului întreg de valori științifice. *Newton* admite existența metafizicei, nu însă interpătrunzând știința ei ca o realizare mai îndepărtată, imediat următoare saturației științifice (în sensul de stare de complectă achiziționare a adevărurilor existente și dorite) — saturația e limpede că nu-și anunță venirea într'un viitor prea curând. El situiază metafizica nu la baza științelor, ci la finele lor, ca ultim instrument de desăvârșire, prin transcendental, a cuceririlor științelor naturale. Iată deci o poziție cu totul opusă celei a lui *Descartes;* știința, după *Newton,* nu-și are cu anticipație hotărîtă predestinația în viitor ; el nu trasează linii de conduită, ci se mărginește să reflecteze în particular, după fiecare rezultat nou câștigat. Lipsa de ordine în expunere și de coordonare logică a demonstrațiilor este caracterul specific operelor lui *Newton,* caracter ce contrastează flagrant cu nevoia par'că înnăscută și impusă *apriori,* de ordine desăvârșită, a spiritului cartezian. — De pildă în opera sa *Arithmétique universelle*, tronează o absență de spirit sistematic atât de izbitoare, încât e peste putință să nu conchizi că acest fel de expunere a izvorît, nu din întâmplare sau dintr'o inevitabilă neputință, ci cu bună știință. Nu se întâlnesc aci lungile raționamente atât de obicinuite tuturor uvrajelor lui *Descartes,* raționamente cari aveau de scop să institue ansamble de teoreme, stabilind drumuri și metode comune, alăturând prin analogie logică propoziținile unele de altele. La baza cercetărilor lui *Newton* nu rezidă o concepție de unitate în metodă [1]). El manifestă foarte adesea, aproape constant, o evidentă indiferență față de construcțiile cu caracter de edificiu logic. In demonstrații învinge investigația de moment, imprimându-le un caracter de vădită relativitate în ceeace privește utilitatea lor în viitor, în cazuri similare.

Newton e preocupat mai mult de a ajunge la regule practice, pe cari spre o mai bună comprehensiune și precizare le ilustrează prin exemple simple. Preferă procedeul acesta, oricăror construcțiuni logice, rigide. — In rezolvarea unei propoziții se caută totdeauna introducerea unor artificii de calcul sau raționament, cari dau demonstrației mai multă viață proprie — și cari uneori deschid drumuri noi, perspective până atunci neîntrezărite. *Newton* avea o deosebită simpatie pentru aceste artificii ce vădesc o ascuțime de spirit și o diversitate în alegerea mijloacelor, remarcabile, cultivându-le într'un însemnat grad și acordându-le în consecință o mare însemnătate. Dar interesul său pentru aceste scăpărări de spirit inventiv se oprește aci ; nu caută să întrevadă în mulțimea aceasta de procedee particulare și părelnic deosebite, o legătură comună, o apropiere de raționament. Dar nu e numai atât. După cum am spus demonstrațiile

[1]) E de observat excepția pe care o fac operele sale începând din 1700 și în special *Les Principes Mathématique de la Philosophie Naturelle*, care se prezintă ca o construcție deductivă, asemeni *Elementelor* lui *Euclide* sau uvrajelor în genere ale lui *Descaetes.* Se găsesc aci expuse: definiții, axiome, leme, propoziți și corolare, adică tot ceeace se găsește și în operele amintite. Nu trebue însă să ne înșelăm. Această construcție este numai accidentală și vizează numai forma expunerii, esențialul operii fiind evident pur experimental. Ceeace l-a făcut pe *Newton* să adopte forma deductivă a fost dorința de a da cercetărilor sale o formă mai logică, cu explicări și desvoltări pur raționale, cari să împiedice criticile analoage celor de pe urma cărora suferise atât, — când adversarii săi refăceau experiențele descrise de el, în condiții diferite și conchideau neverosimilitatea lor. Dealtfel se vede o oarecare jenă în expunerea matematic — deductivă a lui *Newton* și se poate spune că această expunere nu pare deloc naturală, isvorîtă dintr'o absolută necesitate, ci are mai mult caracterul unei imitațiuni, bineînțeles perfectă, fără lacunne. Caracterul factice al acestei construcții logice ne face să afirmăm că ea s'a produs fără voia lui *Newton*, numai din constrângeri exterioare.

sale abundă în metode şi artificii diferite. Acestor metode *Newton* le acordă numai o importanţă ce se mărgineşte la recunoaşterea utilităţiilor; ele interesează în măsura în care întrebuinţarea lor dă roade mai mult sau mai puţin simţite. Prin urmare o metodă oarecare nu-şi justifică existenţa decât ca *mijloc* — şi atâta tot. Pentru el nu poate exista separaţie între metodă şi grupul de propoziţii la ale căror demonstraţii servă ea. Spiritul cartezian se opune şi aci concepţiei newtoniene. In afară de importanţa uzuală pe care toţi trebue s'o recunoaştem unei metode oarecare, mai există şi o importanţă ce vizează existenţa în sine a metodei. Prin descoperirea unei noi metode se cucereşte o nouă — câteodată surprinzătoare — construcţie logică, o nouă înlănţuire de raţionamente (şi *maniera* de înlănţuire interesează adesea mai mult decât chiar rezultatul) a cărei perfectibilitate (dovedită şi prin rezultatul obţinut prin aplicarea ei) este un argument suficient pentru a i se acorda o atenţie specială. Pentru câmpul valorilor logice o metodă nouă prezintă o importanţă deosebită chiar numai prin existenţa *în sine*, independent de utilitatea ei, — pentru care scop a fost de fapt creată. *Newton* însă, pentru care preocupările de logică pură n'aveau ce căuta în matematici, era uşor de prevăzut că va lua atitudinea schiţată mai sus. Deaceea, deşi întrebuinţează metode proprii, nu le demonstrează. Cauza, e aceeaşi minoră preţuire a preceptelor logice — cari faţă de exemple nu au nici decum întâietate [1]). Pe *Newton* nu-l interesează atât de mult instrucţia filosofică a intelectului, educaţia gândirii metodice (aceasta sau pentrucă îşi închipuia că într'o oarecare măsură o astfel de educaţie o au în genere toţi oamenii de inteligenţă normală, — sau pentrucă o crede inutilă, deoarece ea i-a servit numai lui, în procesul de creare, pe când ceilalţi sunt chemaţi să ia numai act de rezultatele obţinute de el, singurele cari se pare că *Newton* consimte să le împărtăşească şi altora, fiind singurele care-i pot interesa) — cât mai ales succesul cercetărilor.

III.

In ceeace priveşte noţiunile fundamentale ale matematicilor, *Newton* pare a fi un precursor al nominaliştilor, considerând şi el aceste noţiuni ca pe nişte convenţiuni libere ale spiritului. Totuşi e o deosebire. El nu uită că algebra, de pildă, oricâtă abstracţiune ar concentra în teoremele sale, păstrează şi o pecete distinctă a unei bune părţi de participare a empiricului. *Newton* consideră operaţiunile aritmetice ca pe nişte convenţiuni, suggerate însă de natură [1]). Natura este aceea care trebue să ne indice calea pe care trebue s'o urmăm în consideraţiile calculului cu simboale abstracte. Un exemplu va ilustra cele afirmate. Este exemplul noţiunii de infinit mic, pe care unii au căutat să o descopere ascunsă în celula cea mai depărtată a unui complicat labirint pur logic, convinşi de absoluitatea celei mai strânse abstracţiuni. *Newton* arată că noţiunea infinitului mic ne este intuită de continuitatea fenomenelor fizice. Şi mergând mai departe, dă aceeaşi interpretare fizică, cinematică, raportului de doi infiniţi mici, raport care nu face altceva decât să traducă simbolic o noţiune deja existentă în câmpul percepţiunilor simţurilor noastre, — noţiunea de viteză, cantitate finită şi cu oarecari aproximaţii măsurabilă. *Newton* admite prin urmare concepţiunea genetică a mărimilor, concepţiune ce nu poate fi o ficţiune, deoarece ni se înfăţişează contact sub ochii noştri ca o realitate a naturii.

Cercetările lui *Newton* sunt imprimate de aluzii directe fie la mecanică — în special la dinamică, — fie la fizică. El înlocuieşte limbajul abstract recurgând la interpretări mecanice de vectori şi traectorii.

— Trebue însă să facem o precizare. Când *Newton* spune: *ştiinţă fizică, naturală,* nu trebue să înţelegem ceeace astăzi însemnează aceste cuvinte în limbajul curent ştiinţific, ci mai mult o *filosofie naturală.* In Anglia cuvântul *fizică* are înţelesul acesta *(natural philosophy).*

IV.

Totalitatea valorilor spirituale ce se încadrează în domenii deosebite, ştiinţa, arta, morala, religia şi filosofia nu-şi au un scop în ele însile. Scopul

[1]) ... „exemplele sunt mult mai *utile* decât preceptele“ *(Arithmétique Universelle*, pag. 251). — Sublinierea e a noastră.

[1]) Poate că este locul să amintim că acest fel de a vedea îl vom regăsi la *H. Poincaré* — care deşi se apără de *învinuirea (!)* de a fi nominalist; nu poate fi numit altfel.

lor e o finalitate ce ţinteşte numai umanitatea. Dar chiar umanitatea, căreia acestea i-ar fi supuse, nu poate fi nici ca un ultim ţel, un „fin en soi". De-aceeea sistematizarea excesivă, tendinţa de armonizare absolută a elementelor uneia din ele, împiedică cealaltă tendinţă, de armonie şi sintetizare universală. Ştiinţa, aşa cum a conceput-o *Newton*, e mai aptă unei contribuţii la această armonie finală. Au fost însă alţii cari s'au cantonat într'o specialitate toată viaţa, ajungând să o erijeze în supremă preocupare a oricărei minţi gânditoare. Aceştia sunt în aşa grad *posedaţi* de ansamblul de idei pe cari le exploatează până la saturaţia combinaţiilor logice, până la sterilitate chiar, încât le apare ca îndreptăţită, de necontestat, importanţa exclusivă a acestora, — şi-i determină să ignoreze orice alte valori spirituale străine lor. Aceştia sunt reprezentanţii caracteristici ai tipurilor de intelectuali ce constitue clasa raţionalilor, logicienilor, abstracţilor — excesivi. In matematici un exemplu fidel ni-l procură *Platon*, iar în literatură (fiindcă procesul acesta există în toate disciplinile), *Flaubert*.

Fără'ndoială, specializarea absolută antrenează după ea o stare de armonie a tuturor valorilor, foarte avansată. Dar pentruca această armonie să se poată realiza e nevoie de o continuă corelaţie între specialităţi şi această conexiune nu este posibilă atâta timp cât fiecare specialitate se constitue absolut şi izolat, într'o consrtucţie exclusiv de sine stătătoare (pe motivul că aceasta ar fi condiţia esenţială de existenţă a ei). Pentru ca procesul de armonizare să fie posibil, trebue ca fiecare specialitate să lase putinţa unei intervenţii dinafară, cu alte cuvinte, sistematizarea să fie condiţionată de putinţa unei racordări cu celelalte domenii speciale; să-şi păstreze fiecare o parte de rezervă, exploatabilă şi din alt punct de vedere decât acela caracteristic ei.

V.

Ar mai fi de adăogat, şi interesant de cercetat, pânăla ce grad şi în ce direcţie s'a desvoltat spiritul creator al lui *Newton* — spirit ce s'ar putea întrevedea din operele sale. Cazul lui *Newton* — intelectualul e foarte interesant Interesul acesta ne este suscitat de diversitatea cercetărilor şi de marea anvergură a gândirii sale.

Nu s'ar putea spune — à propos de diversitatea cercetărilor — dacă avem un fenomen de proliferaţiune, sau în câmpul fenomenelor psihice ale complexului său intelectual, fiecare domeniu în care a creat a ocupat un loc egal cu celelalte, în volum şi nivel de importanţă. De aiurea, cazurile cunoscute şi studiile psihologice existente ne-ar îndreptăţi să credem că ultima ipoteză nu pare admisibilă. — Cert e că matematicile *pure* nu-l interesau pe *Newton* decât mai mult ca mijloc. — In ce direcţie atunci, era mai cu preferinţă îndreptat intelectul său? Şi prin ce sistem de conlucrare psihică a reuşit să realizeze o coercibilitate a valorilor unor domenii oarecum deosebite?

Asupra mecanismului intelectului său nu se pot spune multe lucruri. Nu s'ar putea spune nici până la ce grad s'a ridicat puterea de abstracţiune a spiritului său, şi cu atât mai puţin, a stabili o linie de demarcaţiune între temperamentul şi impulsiunile ce se leagă de latura sentimentală, şi inteligenţa pur raţională, — sau în ce măsură a fost el stăpânit de anumite idei şi tendinţi conducătoare. Din acest punct de vedere cercetările nu se pot întinde prea mult, din lipsa vreunui isvor sigur şi precis, documentar. Nu ne-au rămas, de pildă, dela *Newton* mărturii personale referitoare la viaţa sa intelectuală, la frământările minţii sale — frământări cari nimeni nu se îndoieşte că au existat, având în vedere polemicele şi discuţiile aşa de înverşunate iscate în urma aprobării sau contestării, acelora ce se raliau sau nu, părerilor şi cercetărilor sale. Munca ne-ar fi fost uşoară atunci când am fi posedat, ca în cazul admirabilelor memorii autobiografice ale lui *Mill*, [1]) un material susceptibil folosirii pentru un astfel de studiu. Din nefericire nu avem decât ceeace se ştie — şi dacă un psiholog ar fi îndemnat să se hazardeze la un asemenna studiu, ar întâlni nenumărate piedici şi mai ales, nu puţine ar fi cazurile în care ar oscila între două afirmaţii, diametral opuse.

---

[1]) *John Stuart Mill*, **Mes mémoires**. — Histoire de ma vie et de mes idées, trad. par *E. Cazelles*. *Felix Alcan*, Paris.

NOTE MATEMATICE

7. — *De ce Paştele ortodox a fost la 1 Mai.* Paştele, cea mai mare sărbătoare creştinească, se serbează în amintirea învierii *Mântuitorului Iisus Christos.* Primii creştini nu serbau Paştele în aceiaşi zi; deaceia împăratul *Constantin cel Mare,* pentru a face o unire a tuturor creştinilor, a convocat, în anul 325 un sinod ecumenic, la Niceea, o localitate din Asia Mică. Sf. Sinod, în desbaterile pentru stabilirea datei sărbătoririi Paştelui creştin, a ţinut seamă de următoarele fapte:

1. Mântuitorul a serbat, împreună cu apostolii săi, Paştele evreesc — eliberarea din Egipt — în ziua de Joi 14 Nissan — când se făcea sacrificarea mielului la lumina Lunei pline.

2. Vineri a fost crucificat, Sâmbătă înmormântat; iar Duminecă a înviat.

3. Paştele evreesc se serba în prima zi cu Lună plină după echinopţiul de primăvară.

4. Echinopţiul de primăvară a fost în acel an la 21 Martie şi Sfinţii Părinţi au crezut că va fi totdeauna la aceiaşi dată.

S'a hotărât, atunci, ca toţi creştinii să serbeze Paştele *în prima Duminecă după Lună plină care cade odată cu echinopţiul de primăvară sau imediat după el.*

Prinurmare: Dacă Luna plină este la 21 Martie, odată cu echinopţiul de primăvară şi această zi este Sâmbătă, a douazi, Duminecă 22 Martie, va fi Paştele.

Dacă Luna plină este la 20 Martie, înaintea echinopţiului de primăvară, trebue să aşteptăm Luna plină următoare care va fi peste 29 zile, adică la 18 Aprilie, şi dacă această zi este Duminecă, Paştele va fi Dumineca următoare 25 Aprilie. Urmează de aci că, intervalul în care poate să cadă Paştele este 22 Martie — 25 Aprilie.

Prima Luna plină după echinopţiul de primăvară se numeşte *Lună pascală.*

Sf. Sinod, legând serbătoarea Paştelui de o fază lunară, Lună plină, a crezut că fazele lunare au un ciclu perfect exact, ceeace nu este adevărat şi au introdus, prin aceasta, un nou izvor de greşeli — primul fiind reforma iuliană — pentru biserica ortodoxă.

In adevăr, fazele lunare erau date de ciclul de 19 ani, al astronomului grec *Meton,* după care aceiaşi fază lunară revine la aceiaşi dată a anului. Adică dacă anul acesta a fost Luna plină la 22 Martie, peste 19 ani, va fi Lună plină tot la 22 Martie.

— Acest ciclu, care pentru vremurile acelea, a fost o aşa de mare descoperire în cât a fost numit numărul de aur, nu este însă exact, ci diferă în 19 ani, de adevărata revenire a fazei lunare cu *1 oră şi 28 minute* în plus. Această diferenţă face *o zi în 308 ani;* adică, după 308 ani Luna plină adevărată a lunei Martie va fi cu o zi înaintea celei anunţate după ciclul lui *Meton.*

— Cum de la sinodul de la Niceea, până azi, sunt 1932—325=1607 ani şi cum câtul între 1607 şi 308 este 5, 4, urmează că, Lunile pline, anunţate după ciclul, anul acesta au fost şi vor fi cu 5 zile şi 9 ore în urma Lunilor pline pe care leam văzut şi le vom vedea pe cer.

Anul acesta echinopţiul de primăvară a fost Duminecă 20 Martie ora 19; iar Lună plină adevărată a fost Marţi 22 Martie. Urma — după hotărârile sinodului de la Niceea — ca prima Duminecă, după 22 Martie, adică Duminecă 27 Martie să fie Paştele. Aşa a fost pentru ceilalţi creştini.

Sf. părinţi ortodoxi, au anunţat însă Luna plină după ciclul metonian zis şi păscălie, cu 5 zile mai târziu după 22 Martie, adică la 27 Martie, când era Paştele celorlalţi creştini. Această zi fiind Duminecă, trebuia ca Duminecă următoare 3 Aprilie să fie Paştele ortodox. Dar sf. părinţi ortodoxi n'au considerat ca Lună pascală, Luna plină metoniană de la 27 Martie căzând în zi de Duminecă, ci au considerat pe acea următoare de la 25 Aprilie care a fost după 29 zile. Această zi, 25 Aprilie, fiind Luni şi prima Duminecă după 25 Aprilie fiind 1 Mai, Paştele a fost hotărât la 1 Mai. Despre o coincidenţă cu Paştele evreesc de la 16 Aprilie nu putea fi vorba. Deci, câte hotărâri atâtea greşeli. De altfel despre îndărănicia ortodoxiei de a perzista în greşeli grave astronomice a scris încă de mult D-l profesor universitar *N. Coculescu* într'o broşură specială despre calendar şi D-l Inginer *C. D. Orăşeanu* în Gazeta Matematică anul XXX.

Când însă Paştele ortodox va cădea înainte sau odată cu al celorlalţi creştini?

La această întrebare, răspunsul depinde de aşezarea diferenţei de 5, 4 zile în intervalul unei săptămâni.

Dacă aceste 5, 4 zile sunt cuprinse între două Dumineci, adică, dacă Luna plină adevarată este într'o zi de Luni, Luna plină metoniană va fi Sâmbătă în aceiaşi săptămână; iar Paştele imediat Duminecă pentru toţi creştinii.

Dacă Luna plină adevărată va fi într'o zi de Miercuri, Joi, Vineri sau Sâmbătă, Lună plină metoniană va fi în săptămâna următoare, respectiv în zilele de Luni, Marţi, Miercuri sau Joi, iar Paştele ortodox va fi cu o săptămână în urma celui catolic.

Dacă Luna plină adevărată va fi într'o zi de Marţi, Luna plină metoniană va fi Duminecă; iar Paştele va fi amânat, *fără motiv*, ca anul acesta, nu cu o săptămână, ci cu $29 + 5 = 34$ zile în urma celorlalţi creştini.

In fine dacă echinopţiul de primăvară va fi cu 5 zile în urma Lunei pline adevărate, adică dacă el ar cădea odată cu Luna plină metoniană — indiferent în ce zi a săptămânii — Paştele ortodox va fi înaintea celui catolic.

Pentru anul 1933, Luna plină adevărată pascală este Luni 10 Aprilie, cea metoniană Sâmbătă 15 Aprilie; iar Paştele tuturor creştinilor va fi Duminecă 16 Aprilie 1933.

Acestea ar fi concluziile la care se ajunge studiind nepotrivirile pricinuite de cele 5, 4 zile rămase în urmă de ciclul metonian — păscalia ortodoxă.

Se poate însă ca sfinţii părinţi ortodoxi care nu iubesc astronomia să ne rezerve surprize noui.

I. DUMITRIU-DADA

8. — *Resturile diviziunei lui* A^m *prin p.* Prin problema 1040, a cărei soluţie s-a publicat la pagina 33 din acest an, se cerea restul împărţirei lui 73^{729} prin 9. — Numerele alese de autorul problemei fac ca problema să-şi piardă din interes, căci rădăcina fiind $M9+1$ orice putere a ei va fi tot $M9+1$. — Prin această notă vreau să recomand atenţiunei corespondenţilor noştri studiul foarte interesant şi complect asupra chestiunilor de această natură publicat de D-l *A. G. Ioachimescu* în *Gazeta Matematică* vol. V. sub titlul *„Asupra resturilor divizibilităţii unui număr de forma* A^m *printr-un număr dat p“.*

COL. GH BUICLIU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVII No 9, Mai 1932. Systèmes de points concycliques, par *V. Thébault*. Généralisation de la formule du rayon de courbure en coordonnées polaires, par *R. Goormaghtigh*. Reducerea preliminară a necunoscutelor la stabilirea ecuaţiilor, de *I. Ionescu*.

2. *Bulletin de Mathématique et de Physique, pures et appliquées*, de l'école, Polytechnique „Roi Carol II“, Bucarest; année III-ème (1931—1932), No. 1, Fasc. 7. Sur le calcul de certaines intégrales définies. par *George Calugăreanu* Quelqnes théorèmes d'inversion relatifs aux intégrales et aux séries, par *J. Karamata*. Notice sur une méthode analytique et graphique pour l'analyse des harmoniques des fonctions périodique, par *Ernest Abason*. Les propriétés électro-cinétiques du charbon colloide, par *Eugéne Chirnoagă*. Un problème d'équilibre élastique, par *N. Théodoresco*. Contribution à l'étude des spectres hydrodynamiqus, par *D. Pavel*. Notice sur le calcul symbolique de *Heaviside*, par *I. Constantinesco*. Contributions à l'étude de rédrésseurs éléctrolytiqus, par *M. Marinesco*. La méthode dans l'économie politique, par *Mihail Manoilesco*.

3. *Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa*. Serie II, vol. I, Fasc. III, 1932. Una nuova forma canonica della ternaria cubica, di *Edgardo Ciani*. Attrazioni newtoniana dei tubi sottili e vortici filiformi, di *Tullio Levi-Civita*. Zur Theorie der Zetareihen von *Poincaré*, von *Ludwig Schlessinger*. Determinazione della natura delle radici della soluzione polinomia dell'equazione differenziale,

$$(a_1 x + a_0) y'' + (b_1 x + b_0) y' - n b_1 y = 0$$

Bestimmung derjenigen abszissen eines intervalles für welche die quadratsumme der grundfunktionen der lagrangeschen interpolatlon im intervalle ein möglichst kleines maximum besitzt, von *Leopold Fejér*. Sui sistemi isostatici con sforzi costanti di un mezzo elastico in equilibro, di *Angelo Tonolo*. Sur un problème de calcul des probabilités lié à celui du refroidissement d'une barre homogène, par *Paul Lévy*. Sulle serie dopie, di *Lamberto Cesari*.

4. *Revista de Ciencias*. Ano XXXIV (Lima—Peru), Octombre à Deciembre 1931. Astroida şi evoluenta sa, de *Dr. Vladimir Lewicky*. Ecuaţiunile complecte ale mecanicei analitice, de *Dr. Godofredo Garcia*. Calculo tensorial, de *Dr. Godofredo Garcia*. Teorema momentelor superioare, de *Dr. Godofredo Garcia*.

5. *Boletin Matematico, ano V, No. 2 Abril 1932;* pu-

blicat de *Dr. Bernardo I. Baidaff.* Sisteme de succesiuni de termeni liniari şi omogeni recurenţi, de *B. I. Baidaff.* Exerciţii matematice, de *B. I. Baidaff.*

6. *Boletin Matematico elemental.* Ano III No. 2, Abril 1932. Procedeu rapid şi uşor pentru rezolvarea grafică a unei ecuaţii de gr. II, de *F. Anguita.*

7. *R. Noguès.* Théorème de Fermat, son histoire. Este un volum foarte interesant, de 177 pagini. (Paris, Librairie Vuibert, 25 fr)

8. *Spiridon Ghiţescu.* Problema lui Bayess.

9. *S. Braun et W. Sierpinski.* Sur quelques proposions équivalentes à l'hypothèse du continu. (Fundamenta Mathematicae).

10. *O. Nikodym.* Sur les fonctions d'ensembles.

11. *O. Nikodym.* Sur les suites de fonctions parfaitement additives d'ensembles abstraits.

12. *O. Nikodym.* Sur le fondement des raisonnements locaux de l'analyse classique.

13. *N. Ciorănescu.* Sur la sommation des sénes trigonométriques.

14. *N. Ciorănescu.* Sur l'intégration des équations différentielles linéairés avec les conditions initiales linéaires les plus générales.

15. *Al. Pantazi.* Sur certaines propriétés projectives des familles de surfaces.

PROBLEME REZOLVATE

156 [1]. — *Nici un număr de forma* $2^{\alpha+2}+1$ *nu poate fi prim,* α *fiind un număr impar pozitiv.*

C. H. NICOLAU

α fiind de forma:

$$\alpha = 2p - 1,$$

expresia dată se poate scri:

(1) $$2^{2p+1}+1.$$

Fiindcă pentru n impar avem identitatea:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1}),$$

rezultă pentru expresia (1):

$$2^{2p+1}+1 = (2+1)(2^{2p} - 2^{2p-1} + \ldots + 1) = \text{mult. } 3$$

Expresia din enunţ nu poate fi deci un număr prim, ori care ar fi numărul impar pozitiv α.

Soluţii date de d-nii: *Adam Mircea* (Constanţa), *Dobrescu Băbici* (lic. Caracal), *Berdan C.* (Bârlad), *Dordea A. Traian (†), Georgescu T.* (Ploeşti), *Iliescu Emil, Ionescu I. Brezuica* (lic. Caracal), *Niculescu Alexandru* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Pamula Alexandru* (lic. Botoşani), *Părăianu Nicu* (Şc. Navală), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu, *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti). *Popovici Tiberiu* (lic., Arad), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti) şi *Stoinescu I.* (lil. Cantemir, Bucureşti).

Observare. Mulţi corespondenţi au observat că enunţul iniţial este eronat, fără a face vre-o rectificare.

157. — *Când* n^n *are* n *cifre?*

COL. GH. BUICLIU

Conform enunţului trebuie să avem:

$$10^{n-1} \leq n^n < 10^n$$

Din a 2-a inegalitate rezultă, $n < 10$.

Din prima relaţie deducem:

(1) $$n - 1 \leq n \lg n$$

Folosind o tabelă de logaritmi şi căutând a satisface relaţia (1), pentru $1 \leq n < 10$, găsim că ea este satisfăcută numai pentru:

$$n = 1, \quad 8, \quad 9.$$

Pentru aceste valori enunţul este satisfăcut, căci avem:

$$1^1 = 1, \quad 8^8 = 16777216, \quad 9^9 = 387420489$$

Observare. Această problemă a fost propusă de autor şi în „*Gazeta Matematică*“ sub No. 1043 şi rezolvată în vol. XI, pag. 192.

Soluţii date de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanţa), *Amărescu O. Gavril* (Caracal). *Arcadian Nicu* (lic., Caracal), *Arsene Alexandru* (lic. Milit, Iaşi), *Atanasiu D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Berdan C.* (Bârlad), *Blumenfeld M. David* (lic., Botoşani), *Buşilă A. Adrian* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Cocorandu M.* (lic., Braşov), *Coşereanu Ion* (Şc. Polit., Timişoara), *Dobrescu Bâbici, Dospinoiu N.* (Conductor de Lucrări-Publice), *Dumitrescu G. Marin* (lic. Carol, Craiova), *Flickstein I.* (Cernăuţi), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iaşi), *Focşăneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu), *Georgescu Fl.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic., Galaţi), *Ghiţescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Grofşorean I. Gh.* (lic., Arad), *Iliescu E., Ionescu I. Brezuica* (lic., Caracal), *Ionescu Haralamb* (lic., Oltenita), *Ionescu I. Longin* (Caracal), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (Galaţi) *Klein S.* (Galaţi) *Lăzărescu Th. Jean* (Piteşti), *Lepădatu I. V.* (lic. Internat, Iaşi), *Marţinian Bogdan* (lic. Caracal), *Măru D-tru* (lic. Galaţi), *Negregtzu Florian* (Piteşti), *Neştianu Gh. Gheorghe* (lic. Mrea Dealu), *Pamula Alexandru* (lic. Botoşani), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Părăianu N.* (Şc Navală), *Pollak Al.* (Timişoara), *Pop Alexandru* (student, Cluj), *Popa Ilie* (lic. Internat, Iaşi), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucu-

[1]) Enunţ rectificat.

reşti), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Rămniceanu I. Cristian* (lic. Milit. Iaşi), *Savin C. Ioan* (lic. Milit Iaşi), *Schileru Dili*, *Septilici Raul* (Şc. Milit. de Artilerie), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Solacolu Şerban* (lic. Matei-Basarab), *Solomou Nicu*, *Stamatescu I. Valeriu* (Semin. Pedagogic, Bucureşti), *Stefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Stoenescu J.* (lic. Cantimir, Bucureşti), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tuducescu A. N.*, *Ţanovici V. C.* (student), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vasiliu N. Şt.* (Iaşi), *Weiss Leon* (lic. Galaţi) şi *Weiss Solomon* (lic. Galaţi).

1049. — *Să se deducă din relaţiile date:*

$$\begin{cases} 21a+15b+10c+6d+3e+f=0 \\ 15a+10b+6c+3d+e=0 \\ 10a+6b+3c+d=0, \end{cases}$$

relaţiile echivalente:

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f=0 \\ b+2c+3d+4e+5f=0 \\ c+3d+6e+10f=0 \end{cases}$$

V. ALACI

Scădem din prima relaţie dată pe a doua, apoi din a doua pe a treia, obţinem respectiv:

(1) $\quad 6a+5b+4c+3d+2e+f=0$

(2) $\quad 5a+4b+3c+2d+e=0$

Scăzând relaţia (2) din (1), găsim:

(3) $\quad a+b+c+d+e+f=0$

care este prima relaţie cerută.

Dacă acum scădem din relaţia (3) multiplicată cu 6, relaţia (1), obţinem:

(4) $\quad b+2c+3d+4e+5f=0,$

care este a doua relaţia cerută.

Inmulţim a doua din relaţiile date cu 2, şi scădem apoi relaţia a treia inmulţită cu 3 avem:

(5) $\quad 2b+3c+3d+2e=0$

Scădem apoi pe (5) din relaţia (4) inmulţită cu 2, şi obţinem:

(6) $\quad c+3d+6e+10f=0,$

care este a treia relaţie cerută.

Soluţii date de d-ra: *Abramescu Mariana* (studentă, Cluj), şi de d-nii: *Acikgheozian Nubar* (lic Spiru-Haret, Bucureşti), *Boeriu Valer* (Şc. Polit Timişoara), *Chircă I. Mihai* (lic. Milit, Craiova), *Ciobanu Emanoil* (lic. Milit. Craiova) *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Dan T. Traian* (lic. Beiuş), *Dumitrascu Romeo* (Şc. Polit, Bucureşti), *Fofiu Cornel* (lic., Beiuş), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Grinberg N. Meer* (student, Iaşi), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Iliescu M. Emilian* (lic. Milit, Craiova), *Ioaniu C. Gh.* (lic. Carol. Craiova), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Lăţea C.* (Şc. Milit. de Artilerie), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mihăileanu N. N* (Constanţa), *Nagler Meyer* (lic. Naţional, Iaşi), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Nenciulescu Hariton* (lic. Milit,, Tg.-Mureş), *Pănoiu Emanoil* (lic. Carol, Craiova), *Păunescu Nicolae* (lic. Milit., Craiova), *Pop I Leontin* (Şc. Polit., Timişoara), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova) *Şerban Teodor*, *Sova S. I.* (Bucureşti), *Stan Ioan* (lic Roman) şi *Tica P. Marin* (Şc. Milit. de Artilerie).

A 2-a soluţie dată de d-l *Mihăileanu N. N.* (Constanţa).

Insemnând cu $P_1, P_2 P_3$ primii membrii a-i relaţiilor date şi cu R_1, R_2, R_3 primii membrii a-i relaţiilor echivalente cerute, cu ordinea în care sunt scrise, observăm uşor că R_1, R_2, R_3, se deduc din P_1, P_2, P_3, astfel:

$$R_1 = P_1 - 2P_2 + P_3$$

$$R_2 = 5P_1 - 11P_2 + 6P_3$$

$$R_3 = 10P_1 - 24P_2 + 15P_3$$

1050. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^2+xy+yz+zx=12 \\ y^2+yz+zx+xy=15 \\ z^2+zx+xy+yz=20 \end{cases}$$

EM. PANOIU

Sistemul dat se mai poate scri:

$$(1) \quad \begin{cases} (x+y)(x+z)=12 \\ (x+y)(y+z)=15 \\ (x+z)(y+z)=20 \end{cases}$$

Inmulţind aceste ecuaţii şi extrăgând rădăcina patrată, obţinem:

$$(x+y)(y+z)(z+x)=\pm 60$$

Impărţind această ecuaţie pe rând prin ecuaţiile sistemului (1), avem:

$$(2)\quad \begin{cases} y+z=\pm 5 \\ z+x=\pm 4 \\ x+y=\pm 3 \end{cases}$$

Adunând, deducem:

$$x+y+z=\pm 6$$

Scăzând din această ecuație pe rând ecuațiile sistemului (2), obținem sistemul de soluții căutat:

$$\begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 2 \\ z=\pm 3 \end{cases}$$

Soluții date de d-ra: *Abramescu Mariana* (studentă, Cluj) și de d-nii: *Acikgheozian A. Nubar* (lic. Spiru-Haret, București), *Arbter Emil* (lic. Beiuș), *Boeriu Valer* (Șc. Polit. Timișoara), *Chirilă Andreiu* (lic. Timișoara), *Chircă I. Mihaiu* (lic. Milit. Craiova), *Ciobanu Emanoil* (lic. Milit. Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit. Craiova), *Curchi Ioau* (student, București), *Dăscălescu Șt. Hristache* (student, București), *Drăgan Ion* (R,-Vâlcea), *Dan T. Traian* (lic. Beiuș), *Dumitrașcu N. Romeo* (Șc. Polit. București), *Fofiu Cornel* (lic. Beiuș), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Grinberg N. Meer* (student, Iași), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit. Tg.-Mureș), *Iliescu M. Emanoil* (lic. Milit. Craiova), *Ioanin C. Gh.* (lic. Carol, Craiova), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Landmann Ș.* (Tighina), *Lățea P. C-tin* (Șc. M lit. de Artilerie), *Lascu Ioan* (lic. Milit, Craiova), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Mașcaș Petru* (lic. Beiuș), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, București), *Mehedinți D.* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Mereuță Emilian* (student, București), *Mihăileanu N. N.* (Constanța), *Motoc D Mircea* (lic. Oltenița), *Negrea A.—Leonte Mircea* (student, București), *Nenciulescu Hariton* (lic. Milit., Tg -Mureș), *Parepeanu C. Ion* (Șc. Milit. de Geniu), *Pop Leontin* (Șc. Polit. Timișoara), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzești, Craiova), *Reghiș Pavel* (lic. Beiuș), *Șavovici Florentin* (lic. Milit. Tg.-Mureș), *Stan I.* (lic. Roman), *Stefănescu Anibal* (București), *Stefănescu I. Ioan, Stoica Ioan* (Sub-Lt.), *Stoicescu I. Ernest* (Șc. Milit. de Geniu), *Tica P. Marin* (bacalaureat) și *Trică I. Ioan* (Constanța).

Generalizare dată de d-l Mihăileanu N. N. (Constanța).

Dacă notăm:

$$y=x_1^m+x_2^m+\cdots+x_n^m,$$

se cere să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} (y-x_2^m)(y-x_3^m)\ldots(y-x_n^m)=a_1 \\ (y-x_1^m)(y-x_3^m)\ldots(y-x_n^m)=a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (y-x_1^m)(y-x_2^m)\ldots(y-x_{n-1}^m)=a_n \end{cases}$$

Inmulțind aceste ecuații și extrăgând rădăcina de ordinul $n-1$, avem:

$$(y-x_1^m)(y-x_2^m)\ldots(y-x_n^m)=(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n-1}}$$

Impărțind această ecuație pe rând prin fiecare din ecuațiile sistemului, obținem:

$$(1)\quad \begin{cases} y-x_1^m=\dfrac{(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n-1}}}{a_1} \\ y-x_2^m=\dfrac{(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n-1}}}{a_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y-x_n^m=\dfrac{(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n-1}}}{a_n} \end{cases}$$

Adunând aceste ecuații, deducem:

$$y=\frac{(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n-1}}}{n-1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

Scăzând din această ecuație pe rând ecuațiile sistemului (1) deducem:

$$x_i=(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{m(n-1)}}\left[\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)-\frac{1}{a_i}\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$(i=1,2\ldots n).$$

Pentru $m=1, n=3$, avem problema propusă.

Observare. D-nii *Grinberg N. M., Pop Leontin* și *Predoescu I. Marin* (lic. Buzești, Craiova), au generalizat problemă propusă, scriind în enunțul dat a, b, c în loc de 12, 15, 20.

1053. — *Să se rezolve ecuația:*

$$\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}+\frac{1}{\operatorname{tg}x}=\frac{8}{1+\operatorname{tg}^2x}$$

SUB-LT. ION C. VONICA

Ecuația dată se mai poate scri evident:

$$\operatorname{tg}2x+\operatorname{cotg}x=8\cos^2x,$$

sau:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 8\cos^2 x$$

$$\sin 2x \sin x + \cos 2x \cos x = 8\cos^2 x \cos 2x \sin x$$

Putem scri încă:

$$\cos(2x - x) = \cos x = 8\cos^2 x \cos 2x \sin x,$$

sau:

$$\cos x(8\sin x \cos x \cos 2x - 1) = 0$$

De aci, deducem:

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\sin 4x = 1 \end{cases}$$

Prima ecuație ne dă:

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

A 2-a ecuație, care se poate scri:

$$\sin 4x = \frac{1}{2},$$

ne dă:

$$4x = 2k\pi + 30^0 \quad \text{și} \quad 4x = (2k+1)\pi - 30^0,$$

Deci:

$$x = \frac{k\pi}{2} + 7^0, 30' \quad \text{și} \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{4} - 7^0, 30^0$$

Soluții date de d-nii: *Acikgheozian Nuber* (lic. Spiru-Haret, București), *Ciobanu Emanoil* (lic. Milit., Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Curchi Ioan* (student, București), *Dumitrascu N. Romeo* (Șc. Polit., București), *Dumitru Zamfir* (Șc. Navală), *Ilie C. Ion* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Ivănescu Cezar* (lic., Bârlad), *Lățea P. C-tin* (Șc. Milit. de Artilerie), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Mereuță Emilian* (student, București), *Mihăileanu N. N.* (Constanța), *Motoc D. Mircea* (lic. Oltenița), *Nenciulescu H.* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Păunescu Nicolae* (lic. Milit., Craiova), *Pop Leontin* (Șc. Polit., Timișoara), *Popescu C. Ștefan* (lic. Milit., Craiova), *Savovici Florentin* (lic. Milit, Tg.-Mureș), *Sova C. I.* (București), *Țica P. Marin* (bacalaureat, Craiova) și *Trică I. Ioan* (Constanța).

1054. — *Să se facă calculabilă prin logaritmi, expresia:*

$$\frac{\operatorname{tg}(b-c)}{\operatorname{tg} a} + \frac{\operatorname{tg}(c-a)}{\operatorname{tg} b} + \frac{\operatorname{tg}(a-b)}{\operatorname{tg} c}$$

CEZAR COSNITA

Considerăm relația:

$$\operatorname{tg}(b-c) = \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c}{1 + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}$$

care se mai poate scri:

$$\operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \operatorname{tg}(b-c) = \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c - \operatorname{tg}(b-c)$$

Alăturând la aceasta și celelalte formule obținute prin permutarea circulară a literilor, a, b, c și adunând aceste trei egalități, avem:

$$(1) \qquad \Sigma \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \operatorname{tg}(b-c) = -\Sigma \operatorname{tg}(b-c)$$

Dar:

$$(2) \qquad \Sigma \operatorname{tg}(b-c) = \Pi \operatorname{tg}(b-c)$$

relație ce se obține din formula cunoscută:

$$\operatorname{tg}(x+y+z) = \frac{\Sigma \operatorname{tg} x - \Pi \operatorname{tg} x}{1 - \Sigma \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z},$$

în care se ia, $x = b - c, y = c - a, z = a - b$.

Ținând seamă de (2), relația (1) devine:

$$\Sigma \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \operatorname{tg}(b-c) = -\Pi(b-c),$$

sau împărțind ambii membrii prin $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$ și scriind desvoltat, obținem:

$$\frac{\operatorname{tg}(b-c)}{\operatorname{tg} a} + \frac{\operatorname{tg}(c-a)}{\operatorname{tg} b} + \frac{\operatorname{tg}(a-b)}{\operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{tg}(b-c)\operatorname{tg}(c-a)\operatorname{tg}(a-b)}{\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c},$$

formulă care după cum se vede este calculabilă prin logaritmi.

Soluții date de d-ra: *Abramescu Mariana* (studentă, Cluj) și de d-nii: *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București) și *Mihăileanu N. N.* (Constanța).

PROBLEME PROPUSE

1104. — Un proprietar împarte un capital al său în trei părți, pe care le depune la trei bănci. Prima parte o depune cu 10%; a doua parte, care este $\frac{2}{3}$ din prima, o depune cu 12%; în fine a

treia parte, care este $\frac{3}{4}$ din prima, o depune cu 15%. După 2 ani retrage toate capitalurile împreună cu dobânzile lor, şi suma astfel rezultată o depune la o altă bancă cu 20%. După 3 ani, retrage capitalul împreună cu dobânda şi are suma de 57632 lei. Care a fost capitalul depus la început?

VIRGIL CLAUDIAN

1105. — Pe un cerc se mişcă două mobile. Dacă merg în acelaşi senz se întâlnesc la fiecare 30 secunde, dacă merg în sens contrar se întâlnesc la fiecare 10 secunde. Care este viteza fiecărui mobil şi lungimea cercului, ştiind că dacă mergând în senz contrar şi plecând din două puncte la distanţa 42 m., se vor găsi, după 3 secunde la distanţa tot de 42 m.

I DUMITRIU DADA

1106. — O dreaptă Δ taie laturile AB, AC ale unui triunghiu ABC în C', B'. Fie D proecţia lui A pe Δ şi E intersecţia lui BB' cu CC'. Să se demonstreze că dacă Δ, B, C rămân fixe, atunci DE trece printr'un punct fix ori care ar fi A în plan.

COL. GH. BUICLIU

1107. — Anticentrele patrulaterelor formate din patru vârfuri consecutive ale unui pentagon inscriptibil, sunt vârfurile unui pentagon asemenea cu cel dat.

SUB.-LT I. GH ZAMFIRESCU

1108. — ABC fiind triunghlul de referinţă şi A', B', C' picioarele a trei ceviene concurente în M, perpendicularele duse din A', B', C' respectiv pe diametrele AO, BO, CO ale cercului ABC formează cu laturile unghiurilor corespunzătoare ale triunghiului de referinţă trei triunghiuri ale căror cercuri circumscrise au drept centru radical punctul M.

CONSTANTIN IONESCU BUJOR

1109. — Fie $f(x)$ o funcţiune continuă, având o derivată $f'(x)$.

1°. Să se arate că există trei numere reale a, b, c, cuprinse în intervalele:

$$A < a < A+1 < b < A+2$$
$$A < c < A+2$$

(A fiind un număr real dat), astfel că avem:

$$f'(a)+f'(b)=2f'(c). \tag{1}$$

2°. Dându-se:

$$f(x)=x^3+x+1,$$

şi $A=1$, să se determine a, b, c, care să verifice relaţia (1).

V. ALACI

1110. — Să se arate că dacă în ecuaţia:

$$\operatorname{tg}^n x+\operatorname{cotg}^n x=0,$$

punem:

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x=y,$$

ecuaţia rezultată în y, are toate rădăcinele reale.

S-LT. IOAN C. SAVIN

1111. — Să se arate că:

$$\frac{abc}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{h_c h_b h_a}{(h_c-h_a)(h_c-h_b)(h_b-h_a)},$$

a, b, c fiind laturile, iar h_a, h_b, h_c înălţimele unui triunghiu.

ION MARGINEANU

1112. — Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, se cere să se rezolve ecuaţia:

$$rx^3-px^2+(4R+r)x-p=0$$

CEZAR IVANESCU

Observare. In problema 1101 din numărul trecut, se va egala determinantul cu 1.

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și *J. Tschlek*, Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann*, La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale*, Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez*, Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell*, Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff*, Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera*, S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W Lewitzky*, Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler*. Washington (Statele Unite), *J. Shohat*, Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville*, Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault*, Le Mans (Francia), *O. Szász*, Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti*, Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XII. 15 IULIE 1932 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. D V. IONESCU ASUPRA UNUI LOC GEOMETRIC
2. NOTE MATEMATICE: 9, 10, 11.
3. BIBLIOGRAFIE
4. CHESTIUNI DE EXAMEN
5. PROBLEME REZOLVATE: 161, 162, 163, 963, 1055, 1056, 1057, 1062, 1063.
6. PROBLEME PROPUSE: 1113-1120.
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XII — No. 5 TIMISOARA, 15 IULIE 1932

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

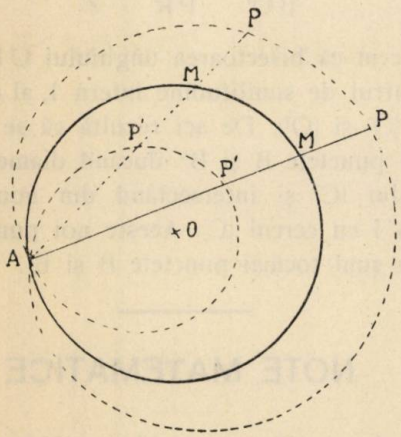
PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

ASUPRA UNUI LOC GEOMETRIC

de D. V. IONESCU
PROFESOR LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE DIN CLUJ

1. Fie A un punct fix al cercului (O) și M un punct variabil pe cerc. Pe raza vectoare A M luăm deoparte și de alta a punctului M segmentele egale M P și M P′ cu o constantă *a*. Se știe că locul geometric al punctelor P și P′ când punctul M descrie cercul (O), este o curbă care se numește *melcul lui Pascal*. Această curbă poate fi ușor construită prin puncte, pornind dela definiția ei.

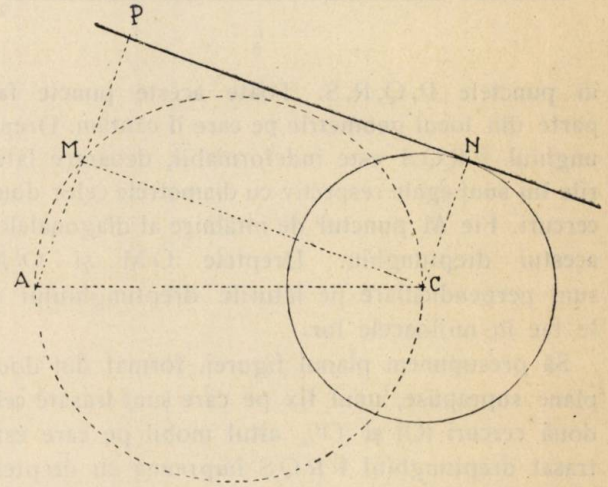


Vom numi punctul A, *polul melcului,* iar cercul (O), *cercul lui generator.*

2. Să considerăm un cerc de centru C și un punct A în planul cercului. Intr'un punct oarecare N al cercului, să ducem tangenta la cerc și să proectăm punctul A pe această tangentă în punctul P.

Locul geometric al punctului P, când punctul N descrie cercul (C), se numește *podara punctului* A *în raport cu cercul* (C). Se știe că această curbă este un melc al lui *Pascal.*

Putem să demonstrăm imediat acest lucru făcând următoarea observare. Fie M proecția lui C pe A P. Se vede pe figură că M P este



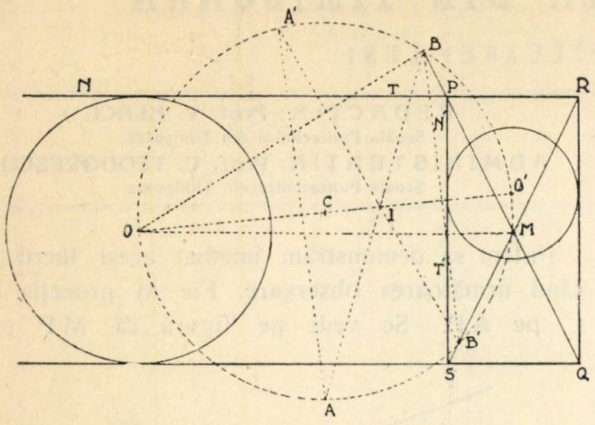
egal cu raza cercului C N. Când punctul N descrie cercul (C), punctul M descrie cercul de diametru A C. Putem deci trece dela punctul M la punctul P purtând pe raza vectoare A M distanța M P egală cu raza cercului C. După definiția dată la No. 1, punctul P descrie prin urmare un melc al lui *Pascal,* având punctul A ca pol și cercul de diametru A C, ca cerc generator.

3. Să considerăm acum două cercuri (O) și (O′) raze *r* și *r′*. Intr'un punct oarecare al cercului (O) ducem tangenta N T și ducem apoi tangenta N′ T′ la cercul (O′) perpendiculară pe N T. Aceste două tangente se intersectează în P.

Scopul acestui articol este să arătăm că *locul geometric al punctului* P, *când tangentele* N T *și* N′ T′ *variază, este tot un melc al lui Pascal.*

Teorema enunțată la No. 2, este un caz particular al acestei teoreme, care se obține când facem ca unul din cercurile (O), (O′) să se reducă la un punct.

4. Tangentele la cercul (O) paralele cu N T, intâlnesc tangentele la cercul (O′) paralele cu N′ T′



în punctele P, Q, R, S. Toate aceste puncte fac parte din locul geometric pe care îl căutăm. Dreptunghiul P R Q S este indeformabil, deoarece laturile lui sunt egale respectiv cu diametrele celor două cercuri. Fie M punctul de intâlnire al diagonalelor acestui dreptunghiu. Dreptele O M şi O′ M sunt perpendiculare pe laturile dreptunghiului şi le tae în mijloacele lor.

Să presupunem planul figurei, format din două plane suprapuse, unul fix pe care sunt trasate cele două cercuri (O) şi (O′), altul mobil pe care este trasat dreptunghiul P R Q S împreună cu dreptele M O şi M O′.

Planul mobil se mişcă pe planul fix, astfel încât cele două drepte ale lui M O şi M O′, perpendiculare, trec prin punctele fixe O şi O′ ale planului fix.

Se ştie că în această mişcare, fiecare punct al planului mobil descrie pe planul fix nu melc al lui *Pascal*. Prin urmare punctele P, Q, R, S descriu melci ai lui *Pascal*.

5. Să reluăm însă această problemă şi să dovedim în mod elementar că punctele P, Q, R, S descriu melci ai lui *Pascal*, determinând polurile lor, precum şi cercurile lor generatoare. Vom vedea mai mult, că punctele P şi Q descriu un acelaşi melc (I), iar punctele R şi S descriu un alt melc (I') simetricul lui (I) în raport cu dreapta O O′.

Fie într'adevăr B intersecţia lui P Q cu cercul (C) descris pe O O′ ca diametru. Când punctul N descrie cercul (O), dreptunghiul P R Q S îşi schimbă poziţia însă este indeformabil. Unghiul O M B care este egal cu unghiul S Q P rămâne învariabil şi prin urmare punctul B este fix. Mai observăm că distanţele M P şi M Q egale între ele, sunt invariabile când punctul N descrie cercul (O). Rezultă că *punctele* P *şi* Q *descriu nu melc al lui Pascal al cărui pol este* B, *iar cercul generator este cercul* (C).

Fie B′ intersecţia diagonalei R S cu cercul (C). La fel se arată că punctul B′ este fix şi că punctele R şi S descriu un melc al lui *Pascal*, al cărui pol este B′ şi al cărui cerc generator este tot cercul (C).

Punctele B şi B′ sunt simetrice în raport cu O O′ deoarece unghiurile O M B′, O M B fiind egale, arcele O B şi O B′ sunt deasemenea egale.

Din această observare, rezultă că cei doi melci sunt simetrici în raport O O′.

6. Să arătăm acum o construcţie simplă a punctelor B şi B′ independentă de dreptunghiul P R Q S. Observăm întâiu că triunghiurile O B O′, P R Q sunt asemenea şi deci:

$$\frac{BO}{BO'} = \frac{RQ}{PR} = \frac{r}{r'}.$$

Deducem că bisectoarea unghiului O B O′ trece prin centrul de similitudine intern I, al celor două cercuri (O) şi (O′). De aci rezultă că se obţin cu uşurinţă punctele B şi B′ ducând diametrul A A′ al cercului (C) şi intersectând din nou dreptele A I şi A′ I cu cercul (C). Aceste noi puncte de intersecţia sunt tocmai punctele B şi B′.

NOTE MATEMATICE

9. — *Generalizarea problemei 156.* — In soluţia dată acestei probleme la pagina 44 Vol. XII nu s-a făcut de loc uz de vre-o proprietate particulară a numărului 2, ceia ce dovedeşte că proprietatea este generală. Se poate enunţa deci problema în felul următor:

Numărul întreg $N^{2p+1}+1$ *nu poate fi prim.*

Procedând ca la soluţia citată a problemei 156 şi înlocuind în identitatea

$$(1)\quad a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

pe a prin N, pe b prin 1 şi pe n prin $2p+1$ se găseşte că $N^{2p+1}+1$ este egal cu:

$$(N+1)(N^{2p-1}+\ldots+1)=\text{Mult.}(N+1)$$

şi teorema este demonstrată.

Demonstraţia se mai poate face şi altfel. Ştiind că dacă n este nepereche

$$(2)\qquad (a-b)^n=\text{Mult. } a-b^n$$

şi putem scrie

$$N^{2p+1}+1=(N+1-1)^{2p+1}+1=$$
$$\text{Mult.}(N+1)-1^{2p+1}+1$$

şi teorema este demonstrată.

Proprietatea se poate generaliza mai mult, sub forma următoare, citind doar identitatea (1):

Numerele $N^{2p+1}+M^{2p+1}$ *nu sunt nici odată prime.*

Făcând înlocuirile corespunzătoare în (1) se găseşte că

$$N^{2p+1}+M^{2p+1}=\text{Mult.}(N+M)$$

sau făcând uz de (2) avem:

$$N^{p+1}+M^{2p+1}=(N+M-M)^{2p+1}+M^{2p+1}$$
$$=\text{Mult.}(N+M).$$

COL. GH BUICLIU

10. — Asupra problemei lui *Appollonius.*

Se cunoaşte problema lui *Appollonius: „Să se construiască un cerc tangent la trei cercuri date"*, care a primit în decursul timpului o serie de soluţii începând cu cea dată chiar de propunătorul ei, care însă nu s'a pastrat.

Dau aci următoarea soluţie, care utilizează numai proprietăţile conicelor.

Fie O_1, O_2, O_3 cele trei cercuri date şi R_1, R_2, R_3 razele lor.

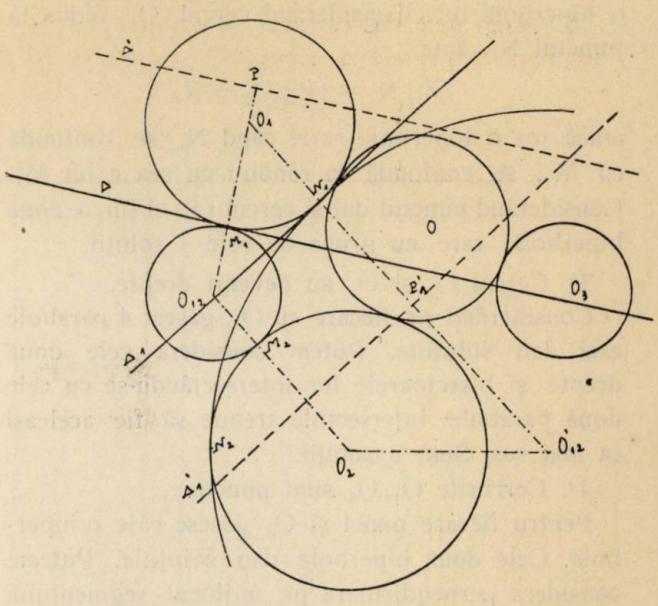
Consider cercurile O_1 şi O_2 şi cercul O_{12} la care primele sunt tangente exterioare.

Am evident:

$$O_{12}O_2-O_{12}O_1=R_2-R_1$$

şi cum O_1 şi O_2 sunt fixe iar R_2-R_1 e constant, punctul O_{12} descrie o hiperbolă de focare O_1, O_2 cu axa netransversă R_2-R_1.

Dacă acum duc un cerc la care O_2 e tangent interior, iar O_1 tangent exterior şi'l numesc O'_{12}, am analog:



$$O'_{12}O_1-O'_{12}O_2=R_1+R_2$$

adică O'_{12} descrie o hiperbolă de focare O_1 şi O_2 cu axa netransversă R_1+R_2.

Considerând în mod analog cercurile O_2 şi O_3 rezultă alte două hiperbole. Intersecţiile acestor 4 hiperbole, ne dau soluţiile problemei. Se ştie că sunt 8 soluţii şi deci cele 4 hiperbole se vor tăia numai în 8 puncte.

Cazuri particulare. 1° Cercul O_1 devine de raza infinită, deci o dreaptă Δ. La o distanţă egala cu R_2 duc pe prelungirea segmentului $O_{12}M_1$ o paralelă la Δ, fie Δ'. In acest caz am evident:

$$O_{12}P=O_{12}O_2$$

dar cum dreapta Δ' şi punctul O_2 sunt fixe, O_{12} va descrie o parabolă de focar O_2 şi directoare Δ'. Analog pentru O'_{12}. La distanta R_2, către O'_{12}, duc paralela Δ'_1 la Δ_1 şi am:

$$O'_{12}O_2=O'_{12}P'_1$$

ceace dă pentru O'_{12} tot o parabolă. Rezultă că am două parabole loc, după cum cercul căutat e tangent interior sau exterior la cel dat.

Consider dreapta Δ şi cercul O_3. Voiu găsi analog două parabole. Intersecţia acestor 4 parabole ne dau soluţiile în număr de opt.

2°. Cercul O_1 se reduce la un punct, punctul M_1. Am:

$$O_{12}O_2-O_{12}M_1=R_2$$

o hiperbolă loc. Considerând cercul O_1 redus la punctul N_1, am:

$$O'_{12} N_1 - O'_{12} O_2 = R_2$$

adică tot o hiperbolă care, când N_1 se confundă cu M_1, se confundă la rându-i cu cea a lui M_1. Considerând punctul dat și cercul O_3 obțin o nouă hiperbolă, care cu prima dă cele 4 soluții.

3°. Cercul O_1 și O_2 au devenit drepte.

Considerând pe fiecare cu O_3, găsesc 4 parabole cari dau soluțiile. Putem considera cele două drepte și bisectoarele lor intersectându-se cu cele două parabole. Intersecțiile trebue să fie aceleași ca mai sus. Sunt 8 soluții.

4°. Cercurile O_1, O_2 sunt puncte.

Pentru fiecare punct și O_3 găsesc câte o hiperbolă. Cele două hiperbole dau soluțiile. Puteam considera perpendiculara pe mijlocul segmentului celor două puncte cu una din hiperbole. Perpendicularele trebuiau să treacă prin intersecțiile celor 2 hiperbole. Sunt 2 soluții.

5°. Cercul O_1 punct, cercul O_2 dreaptă.

O_1, O_2 dau o hiperbolă, $O_2 O_3$, 2 parabole. Intersecțiile sunt soluțiile. Puteam lua $O_1 O_2$ și căpătam o parabolă care trebuia să treacă prin intersecțiile de mai sus. Sunt 4 soluții.

6°. O_1, O_2, O_3 drepte.

Bisectoarele constituesc locurile centrelor cercurilor căutate. Intersecțiile sunt soluțiile în număr de 4.

7°. O_1, O_2, O_3 puncte.

Perpendicularele pe mijloacele segmentelor ce le unesc dau soluția unică.

8°. O_1, O_2 drepte, O_3 punct.

O_1 și O_2 respectiv cu O_3, dau ca locuri 2 hiperbole ce dau soluțiile. Pot considera bisectoarele celor două drepte și o hiperbolă. Sunt 2 soluții.

Dau această soluție, care nu prezintă nici un avantaj practic de construcție, prezintă însă oarecare simplitate în raționament.

SUB.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU

11. — *Asupra unei probleme de geometrie diferențială.*

1. Imi propun să determin *curbele plane pentru cari raza de curbură într'un punct este egală cu raza vectoare.*

Luăm expresia razei de curbură în coordonate polare și anume:

$$R = \frac{\sqrt{(\varrho^2 + \varrho'^2)^3}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}.$$

Scriem această expresie sub forma:

$$(1) \qquad R = \frac{\varrho \sqrt{\left(1 + \frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\right)^3}}{1 + 2\frac{\varrho'^2}{\varrho^2} - \frac{\varrho''}{\varrho}}$$

Exprimând că $R = \varrho$, găsim ecuația diferențială

$$(2) \qquad \left(1 + \frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\right)^3 = \left(1 + 2\frac{\varrho'^2}{\varrho^2} - \frac{\varrho''}{\varrho}\right)^2.$$

Trebue să integrăm ecuația (2). Punem pentru aceasta

$$(3) \qquad \frac{\varrho'}{\varrho} = \operatorname{tg} \varphi$$

și avem atunci:

$$\varrho' = \varrho \operatorname{tg} \varphi$$

$$\varrho'' = \varrho' \operatorname{tg} \varphi + \frac{\varrho}{\cos^2 \varphi} \cdot \varphi'$$

$$\frac{\varrho''}{\varrho} = \frac{\varrho'}{\varrho} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\varphi'}{\cos^2 \varphi} = \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{\varphi'}{\cos^2 \varphi};$$

$$1 + \frac{\varrho'^2}{\varrho^2} = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

$$1 + 2\frac{\varrho'^2}{\varrho^2} - \frac{\varrho''}{\varrho} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}(1 - \varphi').$$

Inlocuind în (2) căpătăm:

$$\frac{1}{\cos^6 \varphi} = \frac{1}{\cos^4 \varphi}(\varphi' - 1)^2$$

$$(4) \qquad \frac{1}{\cos^2 \varphi} = (\varphi' - 1)^2$$

Din (4) deducem:

$$(5) \quad \frac{1}{\cos \varphi} = \varphi' - 1; \quad (6) \quad \frac{-1}{\cos \varphi} = \varphi' - 1.$$

Luăm mai întâi ecuația (5). Ea se scrie

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1 + \cos \varphi}{\cos \varphi}$$

$$(5') \qquad d\theta = \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1+\cos\varphi}.$$

$$d\theta = \left(1 - \frac{1}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\right) d\varphi.$$

Dacă integrăm avem:

$$(7) \qquad \theta + A = \varphi - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Să luăm acum ecuaţia (6). Ea se scrie:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi}$$

$$(6') \qquad d\theta = \frac{-\cos\varphi\, d\varphi}{1-\cos\varphi}$$

$$d\theta = \left(1 - \frac{1}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right) d\varphi.$$

De unde prin integrare se capătă:

$$(8) \qquad \theta + A_1 = \varphi + \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.$$

Insă relaţiunea (3) se scrie:

$$d(\log\varrho) = \operatorname{tg}\varphi\, d\theta.$$

Ţinând seamă de ecuaţia (5') avem:

$$d(\log\varrho) = \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{1+\cos\varphi} = -\frac{d(\cos\varphi)}{1+\cos\varphi}$$

$$d(\log\varrho) = -d\log(1+\cos\varphi)$$

$$\log\varrho = \log\frac{1}{1+\cos\varphi} + \log B'$$

$$\varrho = \frac{B'}{1+\cos\varphi} = \frac{B'}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{B\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$(9) \qquad \varrho = \frac{1}{B\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Reluând din nou relaţiunea

$$d(\log\varrho) = \operatorname{tg}\varphi\, d\theta,$$

şi ţinând seamă de ecuaţia (6'), vom găsi:

$$(10) \qquad \varrho = \frac{1}{B_1\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Eliminând pe φ între ecuaţiile (7) şi (9), găsim ecuaţia polară a curbei, întegrala generală a ecuaţiei (2):

$$(11) \qquad \theta + A = 2\arccos\frac{1}{\sqrt{B\varrho}} - \sqrt{B\varrho - 1}.$$

Eliminând φ între ecuaţiile (8) şi (10), găsim altă formă a întegralei generale:

$$(12) \qquad \theta + A_1 = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{B_1\varrho}} + \sqrt{B_1\varrho - 1}.$$

2. Dacă în integralele generale (11) sau (12), particularizăm constantele convenabil, găsim că printre curbele căutate sunt şi cercurile.

VIRGIL CLAUDIAN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVII, No 10, Iunie 1932. Al doilea Congres al Matematicienilor Români, de *N. C.* Funcţiuni omogene simetrice şi triunghiuri de laturi inverse, de *Căp. Gh. Niculescu.* Asupra ultimului grup de *p* cifre ale patratelor perfecte, de *Ion V. Mătieş.*

2. *Boletin Matematico elemental*, anul III, No. 3, Mai 1932. Concursul la „Boletin Matematico elemental". Puncte complimentare.

3. Dare de seamă asupra activităţii pe anul şcolar 1931—32 a „Societăţii de Matematici a liceului, *Tasse Dumitrescu*" din *Mizil.*

4. *Vlăstarul*, revistă literară şi stiinţifică a liceului *Spiru-Haret*, Bucureşti, anul VIII, N-rile 5, 6 şi 7. Calculul radicalilor, de *Marius Margulius.* Calculul radicalilor. (O aplicaţie a teoriei fracţiunilor continue), de *Marius Margulius.*

5. *A Rosenblatt.* Sur les mouvements voisins des mouvements radiaux plans des liquides visqueux incompressible.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ANUL PREGĂTITOR, IUNIE 1932.

Matematici generale.

I. Relaţia $e^{\frac{y}{a}}\cos\frac{x}{a} = 1$ unde a este o constantă pozitivă, defineşte pe y ca funcţiune de x.

1°. Să se studieze variaţia lui y pentru valorîle lui x care satisfac inegalităţile:

$$-\frac{\pi a}{2} \leq x \leq +\frac{\pi a}{2}$$

şi să se construiască curba reprezentativă (c).

2°. Să se rezolve şi să se discute sistemul:

$$y = y_0$$

$\frac{y}{e^a}\cos\frac{x}{a}=1$ când y_0 ia toate valorile reale.

3°. Să se calculeze valorile lui x când $y_0=1$ și $a=1$.

4°. Să se arate că în punctul A_0 al curbei (c) de ordonată $y_0=1$ și cu abscisa x_0 pozitivă, coeficientul unghiular al tangentei este dat de relația $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{e^2-1}$

Să se găsească α. Se va lua $e=2{,}71$.

II. Să se găsească relația care trebuie să existe între coeficienții polinomului.

$$f(x)=x^4+a\,x^3+(5-\lambda^2)\,x^2+c\,x+d$$

pentru ca el să se poată pune sub forma:

$$(l\,x^2+m\,x+n)^2+p\,x^2$$

Presupunem relația găsită indeplinită, să se rezolve și discute natura rădăcinilor ecuației $f(x)=0$, când $a=2$, $c=4$ iar λ ia toate valorile dela $-\infty$ la $+\infty$.

III. Să se determine α astfel ca y definit de relația:

$$y=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{\sin x+1}}{x^\alpha}$$

Să tindă către o limită finită și determinată când x tinde spre zero. Să se găsească acea iimită.

(Timpul acordat 3 ore).

PROBLEME REZOLVATE

161. — *Să se transforme suma:*

$$(a-b)^7+(b-c)^7+(c-a)^7\ ,$$

într'un produs.

LOCOT. I LINTES

Dacă notăm:

(1) $\quad a-b=x\ ,\quad b-c=y\ ,\quad c-a=z\ ,$

suma dată devine:

(2) $\quad S=x^7+y^7+z^7$

Avem deci de descompus în factori expresiunea (2), unde:

(3) $\quad x+y+z=0$

In adevăr, din (3) deducem:

$$z=-(x+y)$$

și atunci (1) se poate scri succesiv:

$$S=x^7+y^7-(x+y)^7=-(7\,x^6y+21\,x^5y^2+35\,x^4y^3+35\,x^3y^4+21\,x^2y^5+7\,xy^6)$$

$$=-7\,xy\,[x^5+y^5+3\,xy\,(x^3+y^3)+5\,x^2y^2\,(x+y)]$$

$$=-7\,xy\,(x+y)\,(x^4+2\,x^3y+3\,x^2y^2+2\,xy^3+y^4)$$

$$=-7\,xy\,(x+y)\,(x^2+y^2+xy)^2=7\,xyz\,(x^2+y^2+xy)^2$$

Ținând seamă de notațiile (1) putem scri:

$$(a-b)^7+(b-c)^7+(c-a)^7$$

$$=7\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)\,(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)^2$$

Soluții date de dnii: *Adam I. Mircea* (lic. Constanța), *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Atanasiu Corneliu* (lic. Arad), *Bălean G.* (lic. Timișoara), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bejan O. Traian* (lic. Arad), *Bercovici A. Emil* (lic. Matei-Basarab), *Berdan C.* (Bârlad), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoșani), *Bobărnac Mircea*, *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Ciută Gavril* (Șc. Polit. Timișoara), *Coșereanu Ion* (lic. Piatra-Neamț), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăila), *Georgescu C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Georgescu E. Florian* (lic. Cantemir, București), *Georgescu I. N. Valeriu* (Șc. de Artilerie), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Ghimicescu I. Gh.* (lic. Internat, Iași), *Ghișoiu I. Petrică* (lic. Spiru-Haret, București), *Grofsorean I. George* (lic. Arad), *Iacob Șt. Eugen* (lic. Botoșani), *Flickstein I.* (lic. Cernăuți), *Iliescu Th. Teodor* (lic. Spiru-Haret, București), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Landes Felix* (lic. Arad), *Lazărescu Th. Ioan* (lic. Pitești), *Liuba Gh.* (lic. Arad), *Longinescu Abel* (Caracal), *Manoil Adolf* (Roman), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Măru D-tru* (lic. Galați), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Negretzu Florea* (Pitești), *Părăianu Nicu* (Șc. Navală), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Pinchis M.* (lic. Galați), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Rămniceanu I. Cristian* (lic. Milit. Iași), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Singer Ilie* (lic. Câmpina), *Stamatescu I. Valeriu* (Semin. Pedagogic, București), *Stănculescu I. C-tin* (Giurgiu), *Stefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, București), *Stoenescu I.* (lic. Cantemir, București), *Țanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Udriski Traian* (lic. Arad), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

Observare. Mulți dintre corespondenții de mai sus, au găsit în „Culegere de probleme *Algebra*, Cap. II, descompunerile:

$$2\,[(a-b)^7+(b-c)^7+(c-a)^7]$$

$$=7\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)\,[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4]$$

și:

$$(b-c)^4+(c-a)^4+(a-b)^4=$$

$$2\,(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)^2,$$

care ne conduc ușor la desconpunerea găsită mai sus.

162. — *Dându-se polinoamele:*

$$P(x)\equiv x^4-x^3+(a-1)\,x^2+(3\,a-8)\,x+2\,a$$

$$Q(x)\equiv 2\,x^3-x^2+2\,(a-14)\,x+7\,a,$$

să se determine cantităţile A *şi* B, *aşa în cât să avem:*

$$A\,P(x)+B\,Q(x)\equiv D(x),$$

ştiind că A *e independent de* x *şi* B *un polinom de primul grad în* x, *iar* $D(x)$ *c.m.m.c.d a lui* $P(x)$ *şi* $Q(x)$.

CRISTEA P GOILAV

Observăm că putem scri:

$$P(x)\equiv(x^4-x^3-10x^2-8x)+a(x^2+3x+2)$$

$$\equiv x(x+1)(x+2)(x-4)+a(x+1)(x+2)$$

$$=(x+1)(x+2)(x^2-4x+a)$$

$$Q(x)\equiv 2x(x^2-4x+a)+7(x^2-4x+a)$$

$$\equiv(2x+7)(x^2-4x+a)$$

Privind expresiile lui $P(x)$ şi $Q(x)$, deducem uşor că *c.m.m.c.d* al lor este:

$$D(x)\equiv x^2-4x+a$$

Luând, $B=\alpha x+\beta$, conform enunţului trebuie să avem:

$$A\,P(x)+(\alpha x+\beta)\,Q(x)\equiv D(x),$$

sau ţinând de seamă de expresiile lui $P(x)$ şi $Q(x)$ şi simplificând cu $D(x)$, obţinem:

$$A(x+1)(x+2)+(\alpha x+\beta)(2x+7)\equiv 1$$

Identificând coeficienţii aceloraşi puteri ale lui x din cei doi membrii, deducem:

$$\begin{cases} A+2\alpha=0 \\ 3A+2\beta+7\alpha=0 \\ 2A+7\beta=1 \end{cases}$$

Din prima şi ultima ecuaţie, scoatem:

$$\alpha=-\frac{A}{2},\qquad \beta=\frac{1-2A}{7},$$

şi înlocuind în a 2-a, avem:

$$3A+\frac{2-4A}{7}-\frac{7A}{2}=0,$$

de unde:

$$A=\frac{4}{15}$$

şi atunci rezultă:

$$\alpha=-\frac{2}{15},\qquad \beta=\frac{1}{15}$$

Astfel cantităţile A şi B cerute sunt:

$$A=\frac{4}{15},\qquad B=\frac{-2x+1}{15}.$$

Soluţii date de d-ra: *Wetter Anna* (lic. Câmpulung) şi de d-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *Bobărnac C. Mircea* (Şc. Polit. Timişoara), *Coşereanu Ion* (Şc. Polit. Timişoara), *Georgescu I. N. Valeriu*, *Katz M. Pincu* (Galaţi), *Klein S.* (Galaţi), *Mehlmann Theodor* (lic. Câmpulung), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad) şi *Tărăbuţa C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

163. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(x^3+a^3)(x+a)=b^2x^2$$

A. ANGELESCU

Desfacem parantezele şi ordonăm, avem:

$$x^4+a\,x^3-b\,x^2+a^3x+a^4=0$$

Impărţind prin x^2, putem scri:

$$(1)\qquad \left(x^2+\frac{a^4}{x^2}\right)+a\left(x+\frac{a^2}{x}\right)-b^2=0$$

Dacă notăm:

$$(2)\qquad x+\frac{a^2}{x}=y,$$

atunci rezultă:

$$x^2+\frac{a^4}{x^2}=y^2-2a^2,$$

şi ecuaţia (1) devine:

$$y^2+a\,y-(2a^2+b^2)=0$$

De aci deducem:

$$y_1=\frac{-a+\sqrt{9a^2+4b^2}}{2}=A,$$

$$y_2=\frac{-a-\sqrt{9a^2+4b^2}}{2}=B$$

Inlocuind aceste valori în (2), avem:

$$\begin{cases} x^2-A\,x+a^2=0 \\ x^2-B\,x+a^2=0 \end{cases}$$

care rezolvate ne dau:

$$x_{1,2}=\frac{A\pm\sqrt{A^2-4a^2}}{2},\qquad x_{3,4}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4a^2}}{2}$$

Soluții date de d-nii: *Adam I. M.* (Constanța), *Alexandrescu Mihai* (Constanța), *Angelescu N. Traian* (Giurgiu), *Atanasiu I. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Bălean G.* (lic. Timișoara), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bercovici A. Emil* (lic. Matei-Basaral, București), *Berdan C.* (Bârlad), *Bobărnac C. Mircea* (Timișoara), *Bolgiu B. Ovidiu* (lic. Cantemir, București), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, București) *Brăileanu Alexandru* (lic. Constanța), *Coșereanu Ion* (Timișoara), *David Gheorghe* (lic, Timișoara), *Dăngă S. Vlad* (lic. Orhei), *Dobrescu Băbici* (lic Caracal), *Dragomir N. Ioan* (lic. Cantemir, București), *Flikstein I.* (lic. Cernăuți), *Focșăneanu Y. M.* (lic. Mrea Dealu), *Georgescu E. Florian* (lic. Cantemir, București), *Georgescu I. N. Valeriu* (Șc. de Artilerie), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lie. Galați), *Gheorghiu Gh. Lucian, Giota Vicențiu* (Bârlad), *Grabovski Eugeniu* (lic. Orhei), *Harth Ernst* (lic. Câmpulung), *Iacob St. Eugen* (Șc. Milit. de Artilerie), *Ianculescu Octavian* (Timișoara) *Ionescu-Haralambie* (lic Oltenița), *Iordache N. Ioan* (student), *Katz Pincu* (Galați), *Marinescu M. Ion* (lic. Mrea Dealu), *Mchlmann Theodor* (lic. Câmpulung) *Negretzu Florea* (Pitești), *Părăianu Nicu* (Șc. Navală), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Percea Viorel* (lic. Timișoara), *Pinchis M.* (Galați), *Popeanu A.* (Constanța), *Popescu Iancu* (llc. Internat, Iași), *Popescu N. Niculai* (lic. Câmpina), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu), *Ristea N. Mariu* (lic. Caracal), *Santo Semo* (lic. Silistra), *Școdrano Alexandru*, *Solomon N.* (Șc. Polit. Timișoara), *Solomon Wilhelm* (lic. Matei-Basaral, București) *Stamatiu I. Mihail* (Pitești), *Stefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, București), *Stoenescu I.* (lic Cantemir. București), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov) și *Tudocescu A. N.*

963. — *Să se rezolve ecuația:*

$$\sum_{i=1}^{n} \log_{B_i} x = A$$

IOAN C. SCHILERU-DILI

Dacă notăm:

$$y_k = \log_{B_k} x, \tag{1}$$

atunci ecuația dată devine:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = A \tag{2}$$

Din (2) deducem:

$$x = B_k^{y_k}$$

Aplicând logaritmii, într'o bază oarecare B_p, avem:

$$\log_{B_p} x = y_k \log_{B_p} B_k,$$

de unde:

$$y_k = \frac{\log_{B_p} x}{\log_{B_p} B_k}$$

Inlocuind această valoare a lui y_k în (2) obținem:

$$\log_{B_p} x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\log_{B_p} B_k} = A,$$

de unde:

$$\log_{B_p} x = \frac{A}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\log_{B_p} B_k}}$$

și deci:

$$x = B_p^{\frac{A}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\log_{B_p} B_k}}}$$

Soluție dată de d-nii: *Marsieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara), *Mihăileanu N. N.* (Constanța) și *Motoc D. Mircea* (lic. Oltenița).

1055[1]) *Să se găsească un număr* N *compus din factorii 3, 5, 7, știind că* $5N^2$ *are 14 divizori mai puțin ca* $7N^2$, *iar* $3N^2$ *are 15 divizori mai mult ca* N^2 *și 20 mai puțin ca* $7N^2$.

CEZAR IVANESCU

Conform enunțului, N este de forma:

$$N = 3^a \cdot 5^b \cdot 7^c,$$

a, b, c fiind întregi pozitivi.

Rezultă:

$$N^2 = 3^{2a} \cdot 5^{2b} \cdot 7^{2c}$$

$$3N^2 = 3^{2a+1} \cdot 5^{2b} \cdot 7^{2c}$$

$$5N^2 = 3^{2a} \cdot 5^{2b+1} 7^{2c}$$

$$7N^2 = 3^{2a} \cdot 5^{2b} \cdot 7^{2c+1}$$

Știm apoi că numărul divizorilor unui număr descompus în factori primi, se obține mărind exponenții cu 1 și efectuând produsul exponenților astfel măriți. In consecință, rezultă că numărul divizorilor numerilor N^2, $3N^2$, $5N^2$, $7N^2$ este respectiv:

$$(2a+1)(2b+1)(2c+1) = \alpha\beta\gamma$$

$$(2a+2)(2b+1)(2c+1) = \beta\gamma(\alpha+1)$$

$$(2a+1)(2b+2)(2c+1) = \alpha\gamma(\beta+1)$$

$$(2a+1)(2b+1)(2b+2) = \alpha\beta(\gamma+1),$$

[1]) Enunț rectificat.

unde am notat:

(1) $2a+1=\alpha$, $2b+1=\beta$, $2c+1=\gamma$

Ţinând seamă că $5N^2$ are 14 divizori mai puţin ca $7N^2$, şi că $3N^2$ are 15 divizori mai mult ca N^2 şi 20 mai puţin ca $7N^2$, rezultă:

$$\begin{cases} \alpha\gamma(\beta+1)+14=\alpha\beta(\gamma+1) \\ \beta\gamma(\alpha+1)=\alpha\beta\gamma+15 \\ \beta\gamma(\alpha+1)=\alpha\beta(\gamma+1)-20 \end{cases}$$

Simplificând acest sistem obţinem:

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha\gamma+14=\alpha\beta \\ \beta\gamma=15 \\ \beta\gamma=\alpha\beta-20 \end{cases}$$

Comparând ecuaţia doua cu a treia, deducem $\alpha\beta=35$ şi atunci din prima avem, $\alpha\gamma=21$.

Sistemul (2) este deci echivalent cu următorul:

$$(3)\qquad \begin{cases} \beta\gamma=15 \\ \alpha\beta=35 \\ \alpha\gamma=21 \end{cases}$$

Multiplicând aceste ecuaţii, avem:

$$(\alpha\beta\gamma)^2=(3.5.7)^2,$$

şi cum α, β, γ sunt pozitivi, rezultă:

$$\alpha\beta\gamma=105$$

Impărţind această ecuaţie pe rând prin ecuaţiile sistemului (3), găsim:

$$\begin{cases} \alpha=7 \\ \gamma=3 \\ \beta=5 \end{cases}$$

Inlocuind aceste valori în (1), deducem uşor:

$$a=3\ ,\ b=9\ ,\ c=1$$

Astfel numărul cerut este:

$$N=3^3.5^2.7=4725$$

Observare. Soluţ ile date de câţi-va corespondenţi, enunţului nerectificat, sunt eronate, căci dacă avem:

$$N=3^a.4^b.5^c,$$

numărul divizorilor nu este $(a+1)(b+1)(c+1)$, ci este $(a+1)(2b+1)(c+1)$, fiindcă, putem scri:

$$N=2^{2b}.3^a.5^c.$$

1056. — *Să se calculeze sumele.*

$$S_1=1+102+10203+\ldots+102\ldots0n$$

$$S_2=1+201+30201+\ldots+n0\ldots201$$

TEODOR MARSIEU

Suma S_1 se mai poate scri:

$$S_1=(1+100+100^2+\ldots+100^{n-1})+2(1+100+\ldots+100^{n-2})+3(1+100+\ldots+100^{n-3})+\ldots+(n-1)(1+100)+n$$

Insumând progresiile geometrice din paranteze, avem:

$$S_1=\frac{100^n-1}{99}+2\frac{100^{n-1}-1}{99}+3\frac{100^{n-2}-1}{99}+\ldots+(n-1)\frac{100^2-1}{99}+n\frac{100-1}{99},$$

sau;

$$(1)\qquad S_1=\frac{100}{99}[100^{n-1}+2.100^{n-2}\ldots+(n-1)100+n]-\frac{1+2+\ldots+n}{99}$$

Pentru a calcula suma din paranteza mare, considerăm însumarea:

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Derivând în raport cu x, avem:

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=$$

$$\frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}=\frac{(n+1)x^n}{x-1}-\frac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2}$$

Inlocuind aci pe x prin $\frac{1}{x}$, apoi aducând la formă întreagă primul membru, avem:

$$(2)\quad x^{n-1}+2x^{n-2}+\ldots+n=\frac{n+1}{1-x}-\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Pentru $x=100$, avem:

$$100^{n-1}+2.100^{n-2}+\ldots+n=$$

$$\frac{100^{n+1}-1}{99^2}-\frac{n+1}{99}=\frac{1}{99}\left(\frac{100^{n+1}-1}{99}-n-1\right)$$

In virtutea acestei relații, suma S_1 dată de (1), devine:

$$S_1=\frac{100}{99^2}\cdot\frac{100^{n+1}-99n-100}{99}-\frac{n(n+1)}{2\cdot 99}=$$

$$\frac{100(100^{n+1}-99n-100)}{99^3}-\frac{n(n+1)}{198}$$

Aceasta este expresiunea sumei S_1.

Să calculăm acum suma S_2, care se poate scri:

$$(3)\quad S_2=n+2(n-1)\cdot 100+3(n-2)100^2+$$

$$\ldots+(n-1)\cdot 2\cdot 100^{n-2}+n\cdot 1\cdot 100^{n-1}$$

Pentru aceasta, înmulțim cu x relația (2) și apoi derivăm în raport cu x, avem:

$$n\cdot x^{n-1}+2(n-1)x^{n-2}+\ldots+(n-1)\cdot 2x+n=$$

$$\frac{n+1}{(1-x)^2}-\frac{1-(n+2)x^{n+1}}{(1-x)^2}-\frac{2(x-x^{n+2})}{(1-x)^3}$$

Inlocuind aci pe x prin $\frac{1}{x}$ și aducând la formă înreagă primul membru, obținem:

$$n+2(n-1)x+\ldots+(n-1)2x^{n-1}+n\cdot 1x^{n-1}=$$

$$\frac{(n+1)x^{n+1}}{(x-1)^2}-\frac{x^{n+1}-n-2}{(x-1)^2}-\frac{2(x^{n+1}-1)}{(x-1)^3}$$

Pentru $x=100$, avem privind relația (3):

$$S_2=n+2(n-1)100+\ldots+(n-1)2\cdot 100^{n-2}+$$

$$n\cdot 1\cdot 100^n=\frac{(n+1)100^{n+1}-100^{n+1}+n-2}{99^2}-$$

$$\frac{2(100^{n+1}-1)}{99^3},$$

sau:

$$S_2=\frac{(99n-2)100^{n+1}+99n+200}{99^3}$$

Avem astfel calculată și suma S_2.

Soluții date de d-nii: *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Mihăileanu N. N.* (Constanța) și *Trică S. Ioan* (Constanța).

1057. — *Să se rezolve sistemul de ecuații:*

$$\begin{cases} x^4+54x^2y^2+81y^4=8521 \\ x^3y+9xy^3=510 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

Soluții date de d-nii: Fofiu Cornel (lic., Beiuș), Ivănescu Cezar (lic., Bârlad) și Mereuță Emilian (student, București).

Adunăm și apoi scădem din prima ecuație pe a 2-a multiplicată cu 12, obținem:

$$(1)\quad \begin{cases} (x+3y)^4=8521+6120=11^4 \\ (x-3y)^4=8521-6120=7^4 \end{cases}$$

Dacă notăm acum:

$$\begin{cases} x+3y=u \\ x-3y=v, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{6} \end{cases}$$

și sistemul (1) devine:

$$\begin{cases} u^4-11^4=0 \\ v^4-7^4=0 \end{cases}$$

Aceste ecuații se mai pot scri și astfel:

$$\begin{cases} (u-11)(u+11)(u^2+11^2)=0 \\ (v-7)(v+7)(v^2+7^2)=0, \end{cases}$$

de unde dedusem:

$$\begin{cases} u_1=11,\ u_2=-11,\ u_3=11i,\ u_4=-11i \\ v_1=7,\ v_2=-7,\ v_3=7i,\ v_4=-7i \\ (i=\sqrt{-1}) \end{cases}$$

Inlocuind aceste valori în (2) în toate modurile, obținem pentru sistemul dat, următoarele 16 sisteme de soluții:

x	9	2	$\frac{11+7i}{2}$	$\frac{11-7i}{2}$	-2	-9	$\frac{-11+7i}{2}$	$\frac{-11-7i}{2}$
y	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{11-7i}{6}$	$\frac{11+7i}{6}$	-3	$-\frac{2}{3}$	$\frac{-11-7i}{6}$	$\frac{-11+7i}{6}$

x	$\frac{7+11i}{2}$	$\frac{-7+11i}{2}$	$9i$	$2i$	$\frac{7-11i}{2}$	$\frac{-7-11i}{2}$	$-2i$	$-9i$
y	$\frac{-7+11i}{6}$	$\frac{7+11i}{6}$	$\frac{2}{3}i$	$3i$	$\frac{-7-11i}{6}$	$\frac{7-11i}{6}$	$-3i$	$-\frac{2}{3}i$

Alte soluții date de d-nii: *Coandă I. Virgil* (lic. Milit, Craiova), *Constantin G. Petre* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Ghiocel V. Vasile* (lic., Giurgiu), *Ilie C. Ioan* (lic., Milit., Tg.-Mureș), *Landmann Ș.* (Tighina), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Mărza Vasile* (Șc, Polit.), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, București), *Motoc D. Mircea* (lic., Oltenița), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București), *Popa Gh. Ioan* (student, București), *Popescu C. Ștefan* (lic. Milit., Craiova), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzești, Craiova), *Savovici Florentin* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Ștefănescu Anibal* (București), *Stoica I.* (Sub.-Lt.) și *Trică Ioan* (Constanța).

Observare. D-l Ivănescu Cezar (lic. Bârlad), a rezolvat următorul sistem mai general:

$$\begin{cases} a^4x^4+6a^2b^2x^2y^2+b^4y^4=A \\ a^3bx^3y+ab^3xy^3=B, \end{cases}$$

prin aceiași metodă.

1062. — *Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească identitatea:*

$$\sin^n A \sin^n B \sin^n C \sum \frac{h_b^n h_c^n}{r_a^{2n}(p-a)^{2n}} = \frac{a^n+b^n+c^n}{2^n R^{3n}}$$

EMILIAN MEREUTA

Folosim relațiile cunoscute într'un triunghiu:

$$s=2R^2 \sin A \sin B \sin C,\ h_a=\frac{2s}{a},\ h_b=\frac{2s}{b},$$

$$h_c=\frac{2s}{c},\ r_a=\frac{s}{p-a},$$

și avem:

$$(1) \qquad \sin^n A \sin^n B \sin^n C=\frac{s^n}{2^n R^{2n}}$$

Avem încă;

$$\frac{h_b h_c}{r_a^2(p-a)^2}=\frac{\frac{4s^2}{bc}}{s^2}=\frac{4}{bc},$$

de unde rezultă:

$$(2) \qquad \sum \frac{h_b^n h_c^n}{r_a^{2n}(p-a)^{2n}}=4^n\left(\frac{1}{b^n c^n}+\frac{1}{c^n a^n}+\frac{1}{a^n b^n}\right)=\frac{4^n(a^n+b^n+c^n)}{a^n b^n c^n}$$

Cum știm încă, că:

$$abc=4Rs,$$

relația (2) devine:

$$(3) \qquad \sum \frac{h_b^n h_c^n}{r_a^{2n}(p-a)^{2n}}=\frac{a^n+b^n+c^n}{R^n s^n}$$

Înmulțind relațiile (1) și (2), obținem:

$$\sin^n A \sin^n B \sin^n C \sum \frac{h_b^n h_c^n}{r_a^{2n}(p-a)^{2n}}=\frac{a^n+b^n+c^n}{2^n R^{3n}},$$

care este tocmai identitatea cerută.

Soluții date de d-nii: *Acikgheozian Nubar* (lic. Spiru-Haret, București), *Curchi Ioan* (student, București), *Fofiu Cornel*, *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Negrea Leonte A. Mircea* (student, București), *Popa Gh. Ioan* (București), *Sova C. I. Grigoreni*, *Stoica Ioan* (Sub.-Lt.), *Tica P. Marius* (Șc. Milit. de Artilerie), *Trică S. Ioan* (Constanța) și *Zamfir D-tru* (Șc Navală).

1063. — *Produsul primelor două cifre a unui număr de trei cifre este egal cu cubul produsului cifrelor extreme. Să se găsească acel număr, știind că scăzut din răsturnatul său ne dă 99:*

TEODOR MARSIEU

Fie abc numărul cerut. Conform enunțului avem:

$$a \times b = a^3 \times c^3$$

deci:

$$(1) \qquad b=a^2 \times c^3,$$

și încă:

$$100c+10b+a-100a-10b-c=99,$$

de unde:

$$(2) \qquad c-a=1$$

Cum b este de o singură cifră și $c=a+1$, rezultă că egalitatea (1) este satisfăcută numai pentru:

$$a=1,\ c=2,$$

și atunci:

$$b=8$$

numărul cerut este astfel 182.

Soluții date de d-nii: *Acikgheozian Nubar* (lic. Spiru-Haret, București), *Boerescu P. George* (lic., Oltenița), *Chirilă Andreiu* (lic., Timișoara). *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Iași), *Dan T. Traian* (lic., Beiuș), *Dini Al. Ioan* (Șc. Milit. de Artilerie), *Dobrescu Ștefan* (lic. Milit., Iași), *Drăgan Ion* (R.-Vâlcea), *Fofiu Cornel* (lic., Beiuș), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Ghiocel V. Vasile* (lic., Giurgiu), *Grigorescu Decebal* (lic. Spiru-Haret, București), *Ivănescu Cezar* (lic., Bârlad), *Landmann Ș.* (Tighina), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Mehedinți D. D-tru* (lic. Milit, Tg.-Mureș), *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Pănoiu Emanoil* (lic. Carol, Craiova), *Păunescu Nicolae* (lic. Milit. Craiova), *Popa Gh. Ioan* (București), *Popescu C. Ștefan* (lic. Milit., Craiova), *Porumbescu D.* (Tg.-Ocna), *Predoescu I. M.* (lic. Buzești, Craiova), *Savovici Florentin* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Șerban Teodor, Sova C. I.* (student, București), *Tica P. Marin* (bacalaureat, Craiova) și *Trică Ioan* (Constanța).

PROBLEME PROPUSE

1113. — Suma a două numere de trei cifre, care cuprind toate cifrele primelor patru cuburi perfecte, este un număr care are trei cifre identice.

S-LT. IOAN C. SAVIN

1114. — Un avion se ridică de pe aerodromul Băneasa, având la sfârșitul primului minut o viteză de 60,300 Km. pe oră. Apoi el sboară cu o așa viteză, că la sfârșitul unui minut oarecare el are atâția metri pe minut câți avusese la sfârșitul minutului precedent plus de atâtea ori 5 metri cât este numărul minutului considerat de la ridicare. După o jumătate de oră de sburat în acest fel, avionul își transformă sborul în mișcare uniformă. Se cere:

1°. Să se determine viteza exprimată în Km. pe oră din mișcarea uniformă.

2°. Să se determine vitezele în Km. pe oră de la sfârșitul a două viteze consecutive, știindu-se că suma acestor viteze este 390 Km. pe oră.

EM. PANOIU

1115. — Mijlocul segmentului ce unește mijloacele a două laturi opuse dintr'un patrulater înscris într'un cerc dat, împarte raza corespunzătoare, în raportul $\frac{m}{n}$. Se cere locul anticentrului patrulaturui.

SLT. I. GH. ZAMFIRESCU

1116. — Paralele duse prin vârfurile A, B, C ale unui triunghiu la laturile corespunzătoare triunghiului său ortic, formează triunghiul $A'B'C'$. Se cere:

1°. Să se arate că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice.

2°. Să se arate că dreptele $A'A$, $B'B$, $C'C$ sunt concurente.

3°. Să se exprime suprafața triunghiului $A'B'C'$ în funcție de elementele triunghiului ABC.

CEZAR IVANESCU

1117. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} bcx(y+z)=acy(x+z)=abz(x+y) \\ xy+yz+zx=xyz(a+b+c) \end{cases}$$

I. DUMITRIU-DADA

1118. — Să se rezolve sistemul:

$$\arcsin x+\arccos y=k_1\pi+a_1$$
$$\arccos y+\operatorname{arctg} z=k_2\pi+a_2$$
$$\operatorname{arctg} z+\arcsin x=k_3\pi+a_3$$

Să se considere cazul: $k_1=1$, $k_2=2$, $k_3=3$, $a_1+a_2+a_3=0$.

IOAN S. TRICA

1119. — Dacă n este un număr întreg, să se demonstreze că expresia:

$$1+2\cos nx,$$

se divide prin:

$$1+2\cos x,$$

și să se afle câtul.

V. ALACI

1120. — Să se demonstreze egalitatea:

$$\frac{abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}=\frac{h_a h_b h_c}{(h_a+h_b)(h_a+h_c)(h_b+h_c)}$$

ION MARGINEANU

ANUL XII. 15 AUGUST 1932 No 6.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIŞOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREŢUL UNUI NUMAR 12 LEI PREŢUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 N. O. ZAHARIA HENRI POINCARÉ
2. NOTE MATEMATICE: 12, 13.
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 1058, 1064, 1065.
5. PROBLEME PROPUSE: 1121-1128
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii: *F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos* și *J. Tschlek*, Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann*, La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale*, Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez*, Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell*, Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff*, Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera*, S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky*, Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler*. Washington (Statele Unite), *J. Shohat*, Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville*, Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault*, Le Mans (Francia), *O. Szász*, Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti*, Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XII — NO. 6. TIMISOARA, 15 AUGUST 1932

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

HENRI POINCARÉ

de N. O. ZAHARIA

La 17 Iulie 1912 s'a stins din viață cel mai ilustru matematician al timpurilor din urmă, după o viață — de prolifică și continuu susținută muncă — de numai 58 de ani, trăită în credința exclusivă și statornică pentru știința care i-a fost atât de dragă lui, și pe care a voit s'o facă tot atât de iubită și celoralți, împărtășindu-i — cu talentul său de persuasiune — din frumusețile-i ascunse, atât de greu de cucerit, dar atât de elocvente în prietenia ce-o mărturisese tuturor acelora cari i se alipesc cu sinceritate și devotament. O excepțională *devoțiune* pentru știință, pe care o studiază numai pentrucă i-a ghicit tot bagajul de frumuseță ce procură distinse și transcendente satisfacții desinteresate, — iată trăsătura ce caracterizează, ca un colorit ce nu părăsește nici-o clipă preocupările sale intelectuale, întreaga-i activitate științifică. La moartea lui, *Emil Borel (La Revue du Mois)* a spus că întreaga lume intelectuală arborează doliul întristat pentru acel care a fost *Henri Poincaré*. Se cuvine acum, douăzeci de ani după moartea sa, când memoriile sale sunt încă o sursă inepuizabilă de noi cercetări și când cărțile sale de filosofie științifică sunt cetite în atâtea limbi și răspândite în zeci de mii de exemplare în întreaga lume, — să facem un mic popas; să reamintim în câteva cuvinte cine a fost și ce a făcut *H. Poincaré*.

1°. **Omul și cariera.** — *Jules-Henri Poincaré*, s'a născut la 29 Aprilie 1854 la Nancy, un important centru universitar, unde tatăl său profesa la facultatea de medicină cursul de neurologie. Dupăcum se vede, el avea pregătit un mediu de înaltă intelectualitate, o atmosferă universitară, carei-i va ajuta mult la formarea și elevarea spiritului său într'o manieră ce-i va permite libera desvoltare a aptitudinilor înăscute și a cunoștințelor câștigate cu vremea. Dealtfel se pare că familia sa a cumulat prin descedență și alianță un număr considerabil de talente și minți gânditoare remarcabile. E destul să amintim că unchiul său *Antoine Poincaré*, el însuși un distins inginer a avut doi fii — *Raymond* și *Lucien* —: primul, distins avocat, parlamentar, ministru și președinte de consiliu, fost președinte al Republicei Franceze și un ilustru reprezentant al baroului *Senei*, unde a ocupat și rangul de președinte; celălalt, cunoscut fizician, autorul răspânditei cărți asupra „Electricității". Insuși *H. Poincaré* a avut o soră mai mică, ce s'a căsătorit cu filosoful *Emil Boutroux*. Fiul acestuia, *Pierre Boutroux*, decurând decedat, s'a arătat încă de tânăr un spirit lesne pătrunzător, cu aptitudini matematice manifeste încă din primii ani de studii universitare, — mai târziu un bun matematician și mai ales filosof, profesor la universitatea din *Montpellier*. Incă de tânăr *P. Boutroux* a fost însărcinat la *Colège de France* cu ținerea unui curs de istoria și filosofia matematicilor, catedră pe care a ilustrat-o cu competența și sincerul entusiasm ce-ți insuflă dela început cetirea oricăreia din cărțile sale. Tot lui *P. Boutroux* îi datorăm și un minunat studiu analitic și critic asupra operei filosofice a unchiului său *H. Poincaré*, studiu ce a fost publicat imediat după moartea acestuia în *Revue du Mois*.

Părinții lui *H. Poincaré* locuiau, *în Nancy*, la nașterea sa, la bunicul acestuia care era farmacist. Copilul *Jules-Henri* era de o constituție debilă, de un caracter tandru și delicat, fiind cu grije supravegheat și cu prisosință iubit de ai săi. La vârsta fragedăde numai 5 ani suferi de o boală teribilă care promitea să-l priveze pentru restul vieții de darul

vorbirii — lucru care din fericire nu s'a întâmplat. Aceasta însă l-a făcut să fie şi mai timid, retras, oarecum stângaciu, evitând jocurile sgomotoase ale copiilor de vârsta sa, complăcându-se mai mult în compania surioarei sale mai mici, accentuându-se astfel mai mult caracterul său de timid şi solitar şi făcând din el un visător cu inclinaţii şi aere mai mult copilăreşti-feminine. — Primele cunoştinţi i-au fost administrate fără nici un program — „pêle-mêle", de către un institutor din *Nancy*. Intrat la liceu, *Poincaré* se dovedi curând superior codiscipolilor săi în toate disciplinile. In special, era cu deosebire dotat şi strălucea în rapida comprebensiune a oricăror chestiuni de litere, ceeace l-a făcut pe unul din profesorii săi să-l îndrumeze spre studiile literare şi istorice. Insă când fiind în clasa IV-a, a deschis un tratat de geometrie, vocaţia sa s'a precizat îndată şi pentru totdeauna. De atunci *Poincaré* continuă, în timp ce colegii săi se răsboiau cu descifrarea teoremelor exijate de programa cursurilor secundare, să citească uvraje de matematici superioare, care-i produceau o plăcere şi-i suscitau un interes, deosebite. Se spune că, minunat, profesorul său a alergat la mama sa şi i-a spus: „Doamnă, fiul d-stră va fi matematician". Se pare că n'a fost un fals profet! Odată terminat liceul, s'a înscris la Şcoala Politechnică unde a intrat primul (1873). Incă din timpul când era la această şcoală, în cei doi ani de studii, începu să pregătească lucrări originale. Terminând Şcoala Politechnică, concură în acelaş timp la Şcoala Normală Superioară unde reuşi al 6-lea şi la Şcoala de Mine unde reuşi al doilea. Şi se decise pentru aceasta. In timpul celor trei ani ceruţi, el îşi trecu şi licenţa în matematici, făcându-şi şi teza de doctorat. Diplomat al şcoalei de Mine, fu numit inginer la *Vesoul* în 1879. Stătu însă puţin, deoarece i se încredinţă catedra de analiză matematică la universitatea din *Caen*. Fu numit apoi conferenţiar tot la catedra de analiză la facultatea din *Paris*, iar după vre-o 5 ani obţinu catedra de mecanică şi fizică experimentală. După moartea lui *Tisserand*, (a cărui amintire *Poincaré* a cinstit-o cu graiul, şi în scris de respectuoasă şi admirativă consideraţie) trece la catedra de mecanică cerească.

In anul 1887 *Poincaré* a fost ales membru al Academiei de Ştiinţe. Multe Universităţi şi Academii l-au primit în sânul lor ca membru onorar sau corespondent străin. In momentul când, în 1908, solicita intrarea sa la Academia Franceză în fotoliul rămas vacant prin moartea poetului *Sully Prudhomme*, *Poincaré* era deja membru al nu mai puţin de 35 de Academii. Recepţiunea sa la Academie a avut loc la 28 Ianuarie 1909. Până în acest timp *Poincaré* publicase 436 de memorii şi scrieri de matematici, fizică, mecanică, filosofie şi diverse (O listă complectă şi cu îngrijire sistematizată se găseşte în volumul, apărut la 1 Iulie 1909, „*H. Poincaré*. Biographie analytique des écrits", par *Ernest Lebon*, în editura *Gauthier-Villars, Paris*. E o carte de informaţie precisă şi foarte folositoare celor cari vor să se ghideze mai uşor în cercetarea scrierilor lui *H. Poincaré)*. După intrarea sa la Academia Franceză, la 11 Iunie 1909 Academia Română îl primeşte printre membrii onorari străini.

2°. In viaţă fiind, *H. Poincaré* a primit toate onorurile unei glori binemeritată. Ar putea părea unora foarte curios, cum de a putut deveni atât de cunoscut nu numai cercurilor ştiinţifice mondiale, dar chiar profanilor întru ştiinţă, marelui public, un savant — şi încă un matematician. Explicaţia există. — Astăzi încă, mai persistă ideea că un savant trebue să se izoleze în cel mai solidar turn de ivoriu, unde în cea mai nestânjenită singurătate să-şi împlinească o misiune ale cărei rezultate să fie comunicate celorlalţi în bloc, în opere cuprinzând absolut toate cercetările, opere cari de cele mai multe ori sunt date la iveală la moartea autorului. Ideea aceasta poate primi numele de legendă, deoarece lucrurile se petreceau în genere aşa (sau aproape), în trecut. Acesta e tipul savantului din timpurile când pripeala impetuasă şi ritmul trepidant al succesiunii faptelor nu se anunţase încă şi când în această grabă caracteristică epocii contemporane — ştiinţa nu fusese şi ea antrenată, aşa cum este astăzi. Azi omul de ştiinţă trebue să se supună şi el de voie de nevoie manierii grăbite de manifestare publică, permanentului contact cu lumea exterioară. Savantul publică azi, nu opuri de grosimi considerabile, ci mici note, memorii scurte referitoare la chestiuni particulare; descoperiri ce mai eri au survenit, sunt astăzi publicate. Savantul trăieşte cotidian sub te-

roarea anxietăţii de a nu pierde mâine descoperirea de astăzi. Toate coloanele jurnalelor ştiinţifice sunt pline de cercetări fragmentare, unele deabea începuturi; şi nici un articol n'are pretenţiunea să afirme că asupra chestiunii tratată nu mai este posibilă nicio revenire — nici măcar o complectare. Dimpotrivă, putem vedea pe acelaş autor revenind de mai multe ori asupra unei chestiuni nu indestul de studiată, fiecare dată adăogând ceva nou, când nu e de îndreptat ceva greşit. Şi este interesant de făcut remarca următoare: De unde în Europa un savant scrie câte 5—6 articole consecutive asupra aceleiaşi probleme, în America (am putea spune mai precis: în Statele-Unite) sunt savanţi cari publică 20—30 şi uneori mai multe articole pe marginea unei aceleiaşi chestiuni; şi cazurile acestea sunt foarte frequente acolo; poate pentrucă mai mult decât Europa, America este pătrunsă adânc de spiritul modern al civilizaţiei în care viteza — concretizată mai ales prin automobil — e atot hotărîtoare. — Dar nu numai atât. Pe lângă jurnalele ştiiţifice, aceste creaţii ale necesităţilor de informaţie precisă şi imediată — şi mai mult decât acestea —, congresele şi conferinţele prilejuiesc contactul dintre public şi lumea cercetătorilor savanţi. Se simte atât de mult graba în expunere, încât ne este dat să auzim în conferinţe numai jumătăţi de rezultate — fiindcă cercetările sunt în curs —, sau în congrese, pure desiderate şi intrevederi, planuri de posibilităţi şi profeţii, — ceeace niciodată, până pe la jumătatea secolului trecut, nu s'ar fi întâmplat.

Poincaré a fost un savant modern în toată puterea cuvântului. El a avut o permanentă activitate publicistică, iar articolele sale, după apariţia în limba franceză, erau traduse imediat în alte limbi: engleză, itrliană, germană, rusă. Este evident că această rapidă răspândire a memoriilor sale a făcut posibilă cunoaşterea geniului său în lumea întreagă; şi atunci nu ne mai mirăm că aproape toate Universităţile şi Academiile îl numărau, încă fiind în viaţă, printre doctorii sau membrii lor onorari. Totuşi, deşi se poate vorbi despre o *popularitate* a lui *Poincaré*, el nu a fost tentat niciodată ca, sprijinit pe prestigiul său necontestat de mare savant, să încerce şi satisfacţiile efermere ale unor gloriole mai sonore, dar mai puţin durabile; nu a activat în viaţa publică de eât ca savant, abţinându-se departe în special de politică — de politica militantă, fiindcă în ceeace priveşte ideile politice, acestea nu-i lipseau şi conştiinţa capacităţii sale de comprehensiune îl puteau face să spună că nu puţini sunt aceia cari se agită pe arena luptelor politice — de multe ori norocoşi —, etalând păreri ce se sprijină pe un bagaj cu mult inferior aceluia pe care îl poseda el, fără să-l utilizeze *(cf. Le Dr. Toulouse, H. Poincaré. Flammarion, Paris)*.

3º. **Opera ştiinţifică.** Primele manifestări ştiinţifice, în speţă matematice, *Poincaré* le dedică teoriei generale a funcţiunilor, domeniu în care geniul său a strălucit cu atâta competenţă şi în care a adus contribuţii valoroase şi incontestabil încă mult timp pline de rezervoare ascunse, de noi proprietăţi, — ce cad în sarcina celor ce-i urmează, să le descopere şi amplifice cu cercetări şi apreecieri originale. Teza sa de doctorat e tot din materia aceasta, a teoriei funcţiunilor. Dar prima chestiune cu care s'a făcut el cunoscut, a fost teoria ecuaţiunilor diferenţiale lineare şi a funcţiunilor fuchsiane, teorie de care-i este cu deosebire legat numele său de mare matematician. Se ştie că există în teoria generală a funcţiunilor o clasă particulară, căreia i se alătură o mulţime remarcabilă de chestiuni de algebră, mecanică, geometrie şi mai ales fizică matematică — funcţiunile eliptice. Teoria funcţiunilor fuchsiane este ultima generalizare a acestor funcţiuni particulare. Intreaga teorie a funcţiunilor eliptice este construită pe trei principii fundamentale; teorema adiţiunii (cu totul asemătoare teoremei adiţiunii liniilor trigonometrice), principiul inversiunii şi cel al dublei periodicităţi (cf. cu periodicitatea funcţiunilor goniometrice). Principiul dublei periodicităţi a fost descoperit şi extins la cel al multiplei periodicităţi, graţie fructuaselor cercetări în acest domeniu ale lui *Niels Abel* şi *Jacobi* — ale căror funcţiuni denumite jacobiane au fost de un uzaj remarcabil în promovarea descoperirilor în chestiune. Originalitatea lui *H. Poincaré* constă în aceea că el a transpus aceste descoperiri într'un nou domeniu, acela al ecuaţiunilor diferenţiale lineare. Teoriei funcţiunilor fuchsiane, cari introduc un nou ordin de funcţiuni transcedentale, i se alătură multe chestiuni

de aritmetică, algebră şi analiză; dintre ultimile, o importanţă deosebită trebue atribuită legăturii funcţiunilor fuchsiane cu integralele ecuaţiunilor diferenţiale lineare cu coeficienţi algebrici. Teoria funcţiunilor fuchsiane poartă pecetea unor cercetări de înaltă abstracţiune şi deocamdată ele nu au aplicaţii însemnate în mecanică sau fizică matematică, aşa cum am avut ocazia să specificăm mai sus à propos de funcţiunile eliptice; nu însemnează însă că prin aceasta importanţa lor este diminuată şi — indreptăţiţi de cazuri similare frequente în istoria matematicilor — nimic nu ne opreşte să sperăm că o descoperire de o aşa de mare importanţă teoretică nu va întârzia să-şi arate şi roadele aplicaţiilor ei în domenii şi din puncte de vedere încă greu de întrezărit acum. Rămâne deocamdată o preţioasă achiziţie teoretică, ce continuă să constitue un izvor plin de îndemnuri şi precizări de orientare pentru alte cercetări din acelaş domeniu şi de natură pur teoretică.

— In timpul său fizica era într'o fază de transformare, de tranziţie între conservatorismul vechei fizici şi pretenţiunile de întronare a unor concepţiuni noui, a unui fizici noui. In frământarea acestei transformări de concepţiuni, *Poincaré* a luat parte efectivă, fiind — alături de *Lorentz*, *Einstein* şi *Minkowski* — preocupat de problema relativităţii. *Lorentz* emisese ipoteza că toate corpurile sunt supuse la o contracţiune în sensul mişcării terestre. Acest memoriu al său, din 1904, a fost punctul de plecare al cercetărilor de mai târziu ale celor mai sus citaţi. *Poincaré* a publicat asupra acestei chestiuni un studiu în *Comptes rendus de l'Academie des Sciences* şi un memoriu mai intins în *Rendiconti di Palermo*. El afirmă (şi aceasta e baza pe care se sprijină toate argumentele sale) *că nicio experienţă nu poate să pună în evidenţă mişcarea absolută a pământului (Postulatul relativităţii)*, — pe care o presupusese şi care-i era necesară teoriei lui *Lorentz*.

In mecanica cerească una din lucrările sale remarcabile, care i-a atras şi premiul fondat în 1889 de regele *Oscar* al Suediei este *„Le probléme des trois corps et les équations de la dynamique"*, memoriu unde tratează celebra teoremă asupra neexistenţii integralelor uniforme; *Poincaré* a demonstrat că problema celor trei corpuri n'are integrale uniforme in afară de cele deja cunoscute. O altă lucrare de mecanică, în care aduce multe contribuţii personale este *„Figures d'équilibre d'une masse fluide"*.

Am arătat mai sus că *Poincaré* a luat parte efectivă la discuţiile de natură mai mult filosofică iscate de noile tendinţi ale fizicei moderne. De fapt mai toate contribuţiile sale în domeniul fizicei în general şi în acel al fizicei matematice în special, sunt de această natură. El aduce valoroase contribuţii de ansamblu, şi o aprofundată critică a fundamentelor fizicei, stabilind limite şi condiţii în cari anumite ipoteze îşi pot justifica existenţa şi pot fi cu adevărat fecunde. Vom cita câteva lucrări din această branşe: *„Thermodynamique"*, *„Théorie des tourbillons"*, *„Théorie mathématique de la lumière"*, *„Théorie de l'élasticité"*, etc... In aceste uvraje a răspândit *Poincaré* mult din ideile sale filosofice, cari toate tind către aceeaşi atitudine, constituind un sistem filosofic, în care se poate constata de multe ori o accentuată originalitate şi pretutindeni acelaş spirit, în acelaş timp critic şi inventiv.

4°. **Opera filosofică**. Reflexiunile sale filosofice, *Poincaré* le-a strâns în trei volume, toate apărute în *Biblioteca de filosofie ştiinţifică* condusă de *Dr. Gustave Le Bon* (în editura *E. Flammarion, Paris)*; după moartea lui *Poincaré* a mai apărut un volum în aceeaşi colecţiune. Aceste patru volume sunt: *La science et l'hypothèse, Science et méthode, La valeure de la science* şi *Dernières pensées*. Cea mai importantă dintre aceste cărţi, *La valeur de la science*, sintetizează prin chiar titlul său problema care l-a preocupat intotdeauna pe *Poincaré* — valoarea ştiinţei. In intreaga sa operă filosofică el se aplică cu deosebire în elucidarea raporturilor dintre natură şi spirit; căutând să evidenţieze rolul pe care spiritul îl joacă în cercetarea fenomenelor naturale; unde e suficientă numai experienţa, şi unde se impune intervenţia spiritului; şi în ce măsură spiritul cugetător se poate dispensa sau e silit să recurgă la auspiciile experienţei — sub forma ajutorului efectiv, material sau numai de indrumare. După cum am amintit şi mai sus, în lucrările sale de fizică şi mecanică *Poincaré* a răspândit multe din ideile sale filosofice. Deşi specialitatea sa erau matema-

ticele, el a păşit dincolo de pragul acestui domeniu studiind cu deosebire fundamentele ştiinţelor în general. O aluzie relativă la filosofia fizicei, la posibilităţile de construire a unei noi fizici, ne-a fost prilejuită mai sus cu ocazia schiţării, în mod sumar, a operii sale ştiinţifice. Fiindcă expunerea întregei filosofii a lui *Poinearé* ar necesita un spaţiu mai întins, şi cum articolul acesta apare într'o revistă matematică, vom lăsa deoparte toate chestiunile ce se referă la ştiinţele fizice şi mecanice şi vom analiza pe scurt numai părţile privitoare la ştiinţele matematice.

Poincaré n'a urmat niciodată cursuri de litere şi filosofie în timpul studiilor sale universitare; ba chiar, el manifestă o vădită neîncredere faţă de sistemele filosofice constituite, preferind, atunci când căuta rezolvarea unei probleme noui, să facă *tabula rasa* de tot ceeace auzise sau cetise dinainte, privind fiecare chestiune ca şi cum atunci s'ar fi ivit pentru prima dată şi studiind-o în toată intinderea şi profunzimea ei, cu metode proprii. In ceiace priveşte filosofia, el a fost un autodidact şi, ca toţi autodidacţii cari mai au pe lângă acest atribut şi o scântee de geniu, a impus operelor sale un spirit independent, neîncrezător în părerile emise de alţii şi original în ale sale. Autodidactul are avantajul de a înţelege ceeace citeşte, aşa cum îi dictează şi în maniera spiritului său. Apoi, el vine în contact aproape totdeauna, şi dela început — ceeace este foarte important — cu operile marilor gânditori, nu cu sinteze, analize critice sau expuneri schematice, cari nu păstrează caracterul particular al construcţiei autorului. Fiecare autor pune în opera sa ceva personal, şi acest imponderabil dispare oridecâteori această operă este rezumată de altcineva. Cursurile universitare pot fi bune sinteze, dar în majoritate sunt private de acel imponderabil care constitue partea de contriţie a autorului, specifică lui — contribuţia sufletească.

Dealtfel, *Poincaré* a devenit filosof nu pentrucă ar fi avut dela început o înclinaţie şi o simpatie deosebită pentru această disciplină. El a simţit nevoia unor complectări, pe marginea ştiinţei pure, care comportau o discuţie filosofică. Primele reflexiuni filosofice au izvorît din nevoia de a face într'un fel oarecare lumină în chestiunea, care mai mult ca oricând era la ordinea zilei, a geometriilor neeuclidiane; şi-a dat seama că lucrările sale de analiză matematică îi vor permite aceasta. Chestiunea ridicată de postulatul paralelelor este destul de cunoscută.[1]) In urma lucrărilor lui *Lobatschewsky, Bolyiai, Riemann,* toată lumea discuta (şi se înţelege că printre aceştia erau mulţi nechemaţi)[2]) valabilitatea acestor geometrii. Se căuta anume să se dea un sens geometriilor neeuclidiane, servindu-se de geometria euclidiană. *Poincaré* avea de rezolvat o problemă de geometrie obicinuită; el a invins dificultăţile pe cari le întâlnise în rezolvarea acestei probleme părăsind metodele tradiţionale, servindu-se de geometria lobatschewskiană. Era vorba de a raţiona pe o reţea de triunghiurl curbilinii formate din arce de cerc, cari tae ortogonal un cerc fundamental dat. Arcele definite ca mai sus, nu sunt altceva decât ceeace *Lobatschewky* numeşte „linii drepte". Astfel fiind, *Poincaré* a rezolvat problema, mai intâi în geometria neeuclidiană, deoarece aci raţiona asupra unor construcţii de „drepte", şi apoi *a tradus* raţionamentul şi rezultatele în geometria euclidiană. *Poincaré* a arătat astfel că propoziţiile geometriilor neeuclidiane se pot *traduce,* cu ajutorul unui dicţionar, pe care el l-a construit, în proprietăţi ale geometriei euclidiane. „Teoremele geometriei lui *Lobatschewsky* — zice *Poincaré* — sunt tot atât de adevărate ca şi cele ale geometriei euclidiane cu condiţia să fie interpretate aşa cum trebue să fie. Astfel, de exemplu, aceste teoreme nu sunt adevărate relativ la linia dreaptă aşa cum o concepem noi, însă ele devin adevărate, dacă pretutindeni unde *Lobatschewsky* zice „o dreaptă" noi zicem „un cerc care tae ortogonal cercul fundamental". Mă găsesc deci în prezenţa unei teorii, imaginată, e adevărat, într'un scop metafizic, însă în care fiecare propoziţiune, convenabil interpretată, îmi furnizează o teoremă aplicabilă la geometria ordinară". Concluzia la care ajunge *Poincaré* este că cel de al cincilea postulat al lui *Euclide* nu este altceva decât o convenţiune liberă a spiritului. Vom avea o geometrie, după cum vom conveni să numim „dreaptă"

---

[1]) Cf. nota noastră din R. M. T. an IX No. 11.

[2]) Vezi: *N. O. Zaharia,* Reflexii asupra importanţei postulatului paralelelor. — *Boletin Matematico, Buenos Aires 1931.*

o figură geometrică cu proprietăţi oarecari. Dar *Poincaré* nu a crezut suficientă această concluzie, formulată astfel. Dacă putem construi, fără să întâlnim vreun impediment de ordin logic, oricâte geometrii, va trebui să alegem una, care să fie conformă geometriei naturii. El a imaginat atunci o experienţă. Trebuia să se aleagă trei astre cari formează un triunghiu mare şi să i se măsoare unghiurile. Suma acestor unghiuri fiind egală sau mai mică decât două unghiuri drepte, geometria naturii va fi respectiv cea euclidiană sau cea lobatschewskiană. Experienţa aceasta, dacă s'ar fi putut realiza, ar fi decretat postulatul paralelelor ca o lege empirică. Adversarilor empirismului le era însă foarte uşor să demonstreze că experienţă este imposibllă, deoarece imperfecţia simţurilor şi aparatelor noastre împiedică posibilitatea unei măsurători precise. Experienţa efectuată cu cea mai mare grije, ne-ar demonstra numai că suma unghiurilor unui triunghiu este foarte aproape de două unghiuri drepte, dar nicidecum că geometria naturii coincide cu cea euclidiană. Dar nu e numai atât. Operând asupra unui triunghiu format din trei stele depărtate una de alta şi la distanţe mari de pământ, de unde se fac măsurătorile, având în vedere că această experienţă este pur fizică, este nevoie de o definiţie fizică, a liniei drepte. Este imposibil, spre exemplu, de justificat definiţia incetăţenită că linia dreaptă este drumul parcurs de o rază luminoasă. In adevăr, am văzut că acest cuvânt „dreaptă" ar putea inceta, întrebuinţând un alt vocabular, să mai însemneze o dreaptă şi atunci el nu va mai putea caracteriza drumul unei raze luminoase. Pentru convingere, *Poincaré* imaginează o lume convenţională, supusă la anumite legi fizice, cari ar determina pe locuitorii ei să construiască, pentru nevoile lor ştiinţifice, o geometrie care nu este alta decât cea lobatschewskiană, şi care li se va părea lor tot atât de naturală cum ni se pare nouă cea euclidiană. Concluzia definitivă este că postulatul lui *Euclide* este pur convenţional, dar ceeace ne face să-l admitem inaintea oricăruia, care l-ar contrazice, este că el ni se impune nouă din punct de vedere practic. Prin urmare alegerea ne este suggerată din afară.

5°. Ceeace s'a făcut cu postulatul paralelelor, s'a căutat să se facă şi cu alte ipoteze ale geometriei, creindu-se noi geometriei neeuclidiane. Cu problema posibilităţii de construire şi validităţii diferitelor geometrii s'a ocupat în special *Sophus Lie*, creatorul teoriei grupurilor. *Poincaré* arată că o infinitate de geometrii este posibilă din punct de vedere logic. Numărul geometriilor astfel posibile este însă considerabil restrâns, dacă ţinem seama de câteva ipoteze fundamentale ale geometriei. Aceste ipoteze vizează posibilitatea de deplasare în spaţiu a corpurilor solide, fără deformare — aceasta fiind o condiţie absolut necesară, dacă studiul deplasărilor nu este separat de acela al schimbărilor de formă, nu mai există geometrie. Cu ajutorul grupurilor *Poincaré* defineşte dreapta, planul şi celelalte noţiuni geometrice. „Ipotezele fundamentale ale geometriei — conchide *Poincaré* — nu sunt fapte experimentale: observarea unor fenomene fizice le face să fie alese printre toate ipotezele posibile". Dar trebue să remarcăm că experienţele cari ne permit această observare a fenomenelor fizice nu sunt deloc geometrice: ele sunt experienţe de mecanică, dacă se operează asupra corpurilor solide, sau sunt experienţe de optică, dacă se operează asupra razelor luminoase. De aci rezultă imposibilitatea verificării convenţiunilor geometrice; experienţe geometrice nu există.

Asupra originii şi naturii spaţiului *Poincaré* a publicat mai multe articole. In această parte a filosofiei sale, se dovedeşte a fi şi un fin psiholog. *Poincaré* afirma, de pildă, că de fapt geometria corpurilor solide este geometria corpului nostru. Prin urmare o importanţă deosebită vor juca, în geneza noţiunii de spaţiu, toate sensaţiunile musculare şi vizuale. Originalitatea lui *H. Poincaré* constă în aceea că el presupune o fiinţă umană cu totul virgină de orice cunoştinţi geometrice şi ne arată cum aceasta este capabilă ca, pornind dela ceeace se chiamă continuu fizic — adică un continuu care nu are nicio proprietate geometrică — reuşeşte să distingă în acest continuu mai multe dimensiuni. Cu continuurile fizice, cari corespund simţurilor noastre se pot construi diferite spaţii: vizual, tactile şi motoare — cari se înţelge că sunt încă nişte spaţii fizice, nu geometrice, fiecare putând avea un număr oarecare de dimensiuni. Spaţiul geometric ia naştere din confruntarea acestor spaţii şi se înţelege uşor că rezultă de aci un

spaţiu geometric cu un număr variabil de dimensiuni. Totuşi, ştim că spaţiul geometrilor are trei dimensiuni. Ei bine, această restrângere nu este nicidecum necesară, nu ni se impune absolut. Ceeace ne face să acceptăm spaţiul cu trei dimensiuni, este că acest spaţ u este mai comod, mai în concordanţă cu obicinuinţile noastre, cum şi cu tradiţiunea ancestrală — pe care *Poincaré* nu uită s'o amintească şi să-i acorde importanţa cuvenită. Relativ la numărul dimensiunilor spaţiului, *Poincaré* afirmă că dacă facultăţile noastre de intuiţie ar fi fost dirijate de experienţă aşa cum n'au fost, noi am fi imaginat mai cu uşurinţă, de pildă, spaţiul cu patru dimensiuni.

Filosofia geometrică poincareană a făcut să se încetăţenească un alt raport intre rolurile pe cari le joacă în crearea valorilor ştiinţifice, spiritul şi experienţa. Concluziile lui *Poincaré* au darul de a insufla savantului o mai mare putere în posibilităţile spiritului său, dar în acelaş timp par a diminua întrucâtva obiectivitatea ştiinţei, adică unul dintre atributele cari au insoţit-o intotdeauna.

NOTE MATEMATICE

12. — *Asupra ariei trapezului.*

Din tratatele clasice de geometrie elementară, se cunosc două demonstraţii pentru aria unui trapez oarecare. Una, utilizează descompunerea trapezului în două triunghiuri, prin ducerea unei diagonale; alta, utilizează reducerea ariei trapezului, la aria unui triunghiu special, format unind o extremitate a bazei mici cu mijlocul unei laturi din cele neparalele, şi prelungind până întâlneşte baza mare. Următoarele 3 demonstraţii, deşi sunt elementare, nu le-am văzut prin tratatele de geometrie elementară. Ele utilizează alte construcţii, decât acelea amintite mai sus.

Demonstraţia I. Fie trapezul ABCD, în care AB e baza mică şi CD baza mare. Ducem din A şi B, perpendicularele AE şi BF pe baza mare CD. Aria S a trapezului este suma ariilor triunghiurilor dreptunghiuri ADE şi BCF, şi a dreptunghiului ABFE.

Avem:

$$\text{aria } ADE = \frac{DE \times AE}{2},$$

$$\text{aria } ABFE = AB \times AE,$$

$$\text{aria } BCF = \frac{FC \times AE}{2}.$$

Dacă adunăm aceste arii avem:

$$S = \frac{AE \times (DE + FC + 2AB)}{2} =$$

$$\frac{AE \times (AB + CD)}{2}.$$

Demonstraţia II. Să considerăm din nou un trapez ABCD, în care AB e baza mică, iar CD e baza mare. Paralela dusă prin B la AD, tae pe CD în E; fie, în plus, BF perpendiculara dusă din B pe CD Se vede atunci, că aria trapezului ABCD, este suma ariilor paralelogramului ABED şi a triunghiului BCE.

Insă avem;

$$\text{aria } ABED = AB \times BF$$

$$\text{aria } BCE = \frac{EC \times BF}{2}.$$

Dacă le adunăm, atunci căpătăm:

$$S = \frac{BF \times (2AB + EC)}{2} =$$

$$\frac{BF \times (AB + EC + AB)}{2}$$

* * *

$$S = \frac{BF \times (AB + CD)}{2}.$$

Demonstraţia III. Să reluăm trapezul ABCD, în care AB e baza mică, iar CD e baza mare. Laturile neparalele AD şi BC, se întâlnesc în E. Perpendiculara comună pe AB şi CD, dusă prin E, le tae pe acestea respectiv în F şi G. Aria trapezului este tocmai diferenţa dintre ariile triunghiurilor ECD şi EAB. Avem:

$$\text{aria } ECD = \frac{CD \times EG}{2}$$

$$\text{aria } EAB = \frac{AB \times EF}{2}.$$

Insă, din asemănarea triunghiurilor EAF şi

EDG de o parte, şi din asemănarea triunghiurilor EBF şi ECG de altă parte, deducem:

$$\frac{EF}{EG}=\frac{AF}{DG}=\frac{BF}{CG}=\frac{AF+BF}{DG+CG}=\frac{AB}{CD}.$$

$$\frac{EF}{EG}=\frac{AB}{CD}.$$

$$\frac{EG}{EF}=\frac{CD}{AB}$$

$$\frac{EF+FG}{EF}=\frac{CD}{AB}$$

$$\frac{FG}{EF}=\frac{CD-AB}{AB}$$

$$EF=\frac{AB\times FG}{CD-AB}.$$

Acum putem scrie:

$$\text{aria } ECD=\frac{CD\times EG}{2}=\frac{CD\times(EF+FG)}{2}$$

$$\text{aria } EAB=\frac{AB\times EF}{2}.$$

Făcând diferenţa între aceste arii, avem:

$$S=\frac{(CD-AB)\times EF+CD\times FG}{2}.$$

Dacă ţinem seamă de valoarea lui EF, avem atunci în definitiv:

$$S=\frac{FG\times(AB+CD)}{2}.$$

VIRGIL CLAUDIAN

13 — *Determinarea unui polinom, indeplinind anumite condiţi.*

Fie de exemplu de căutat polinomul în x de gradul cel mai mic care pentru valorile a, $k+a$, $2k+a,\ldots,nk+a$ ia valorile $nk+a,(n-1)k+a,\ldots,a$; (a şi k două numere oarecare).

Se vede uşor că acest polinom în n este:

$$f(x)=-x+nk+2a$$

Dacă aplicăm însă formula de interpolare a lui *Lagrange* pentru aflarea acestui polinom şi apoi identificăm, rezultă următoarele identităţi:

$$(1)\quad \frac{(nk+a)^{n-1}}{n!}\cdot a-\frac{[(n-1)k+a]^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{k+a}{1!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(k+a)^{n-1}}{1!}\cdot\frac{(n-1)k+a}{(n-1)!}+(-1)^{n}\cdot a^{n-1}\cdot\frac{nk+a}{n!}+k^{n}=0.$$

Cazuri particulare:

$$a=1\quad k=1$$

$$(1')\quad \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}-\frac{n^{(n-1)}}{(n-1)!}\cdot\frac{2}{1}+\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-2)!}\cdot\frac{3}{2!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2^{(n-1)}}{1!}\cdot\frac{n}{(n-1)!}+(-1)^{n}\frac{n+1}{n!}+1=0$$

$$a\neq 0\quad k=0$$

$$(1'')\quad \frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!\,1!}+\frac{1}{(n-2)!\,2!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{1!\,(n-1)!}+(-1)^{n}\frac{1}{n!}=0$$

$$a=0\quad k\neq 0$$

$$(1''')\quad -\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(n-2)^{n-1}}{(n-2)!}\cdot\frac{2}{2!}-\frac{(n-3)^{n-1}}{(n-3)!}\cdot\frac{3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n-1}{(n-1)!}+1=0$$

Valabile pentru $n>0$.

$$(2)\quad \frac{(nk+a)^{p-2}}{n!}\cdot a-\frac{[(n-1)k+a]^{p-2}}{(n-1)!}\cdot\frac{k+a}{1!}+\cdots+(-1)^{n}a^{p-2}\frac{nk+a}{n!}=0,\qquad p\leq n$$

O serie de n identităţi valabile pentru valorile lui $n>1$. Se pot scrie uşor şi cazurile particulare.

$$(3)\quad a(k+a)(2k+a)\ldots(nk+a)\left[a\frac{1}{(nk+a)\,n!}-\frac{k+a}{1!}\cdot\frac{1}{[(n-1)k+a](n-1)!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)k+a}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{(k+a)1!}+\right.$$

$$(-1)^n \frac{nk+a}{n!}\Big] = (-1)^n (nk+2a)k^n,$$

valabilă pentru $n > 0$.

Sigur că pentru a uşura calculele este preferabil să luăm în loc de $a, k+a$, etc. $\log b^a, \log b^{k+a}$, ..., $\log b^{nk+a}$ polinomul fiind $f(x) = -x + \log b^{nk+2a}$.

La fel dacă am vroi să ne punem problema mai complectă ca să aflăm polinomul în x de gradul cel mai mic care pentru valorile $nk, (n-1)k + a, \ldots, na$, ia valorile $na, n+(n-1)a, \ldots, nk$; sau după cum am amintit $\log b^{nk}$, $\log b^{(n-1)k+a}, \ldots, \log b^{na}; \ldots f(x) = -x + \log b^{nk+na}$, găsim:

$$(4)\quad \frac{na}{n!}(nk)^{p-2} - \frac{k+(n-1)a}{(n-1)!}\cdot\frac{[(n-1)k+a]^{p-2}}{1!} + \frac{2k+(n-2)a}{(n-2)!}\cdot\frac{[(n-2)k+2a]^{p-2}}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)k+a}{1!}\cdot\frac{[k+(n-1)a]^{p-2}}{(n-1)!} + (-1)^n nk\cdot\frac{(na)^{p-2}}{n!} = 0.$$

$p \leq n$, serie de n identităţi:

$$(5)\quad \frac{na}{n!}(nk)^{n-1} - \frac{k+(n-1)a}{(n-1)!}\cdot\frac{[(n-1)k+a]^{n-1}}{1!} + \cdots + (-1)^n nk\frac{(na)^{n-1}}{n!} = (-1)^{n+1}(a-k)^n$$

$$(6)\quad nk[(n-1)k+a][(n-2)k+2a]\ldots na\left\{\frac{a}{k}\cdot\frac{1}{n!} - \frac{k+(n-1)a}{(n-1)k+a}\cdot\frac{1}{(n-2)!\,1!} + \frac{2k+(n-2)a}{(n-2)k+2a}\cdot\frac{1}{(n-2)!\,2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)k+a}{k+(n-1)a}\cdot\frac{1}{1!\,(n-1)!} + (-1)^n\frac{k}{a}\cdot\frac{1}{n!}\right\} = (-1)^{n+2} n(k+a)(k-a)^n$$

Se pot deduce şi identităţi trigonometrice.

Spre exemplu, dacă ne propunem să aflăm polinomul în x care pentru valorile: $e^{nk}, e^{(n-1)k+a}, \ldots e^{na}$ ia valorile $e^{ink}, e^{i[(n-1)k+a]}, \ldots e^{ina}$, sigur că $f(x) = x^i$.

Dintre aceste identităţi interesante de menţionat sunt:

$$(7)\quad \cos nk - \frac{e^{a-k}\left[1-e^{n(a-k)}\right]}{1-e^{a-k}}\cos[(n-1)k+a] + \frac{e^{3(a-k)}\left[1-e^{n(a-k)}\right]\left[1-e^{(n-1)(a-k)}\right]}{\left[1-e^{a-k}\right]\left[1-e^{2(a-k)}\right]}\times \cos[(n-2)k+2a] - \cdots + \cdots + (-1)^{\frac{n+2}{2}}\times \frac{e^{\frac{n(n+2)}{8}(a-k)}\left[1-e^{n(a-k)}\right]\ldots\left[1-e^{\frac{n-2}{2}(a-k)}\right]}{\left[1-e^{a-k}\right]\ldots\left[1-e^{\frac{n}{2}(a-k)}\right]}\times \cos\frac{n(k+a)}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{e^{\frac{(n-2)n}{2}(a-k)}\left[1-e^{n(a-k)}\right]}{1-e^{a-k}}\times \cos[k+(n-1)a] + (-1)^{n+1} e^{\frac{n(n+1)}{2}(a-k)}\cos na = 0$$

Analog o identitate în sinus.

Dacă am fi căutat polinomul de gradul cel mai mic în n care pentru valorile $a, b, c, \ldots k, l$ să ia tot valorile $a, b, c, \ldots, k, l$, dădeam tocmai peste identităţile lui *Euler*.

VALERIU BOERIU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVII, No. 11, Iulie 1932. Sur le triangle podaire, par *V. Thébault*. Curbe paralele şi antiparalele, de *A. Myller*. Un sistem de ecuaţii liniare, de *D. V. Ionescu*. Asupra configuraţiilor determinate de n linii drepte intersectate de o transversală, de *Gh. Zapan*. Mişcarea gazelor cu viteze foarte mari, de Căpitan *I. Linteş*. Asupra axelor conicelor unui triunghiu, de *I. C. Vasiliu*.

2. *Mathematica*, vol. VI, 1932, Cluj. Sur une équation fonctionnelle caracterisant les polynomes, par *Th. Anghelutza*. Remarque sur les polynomes binomiaux, par *T. Popoviciu*. Une nouvelle théorie du rayonnement et de l'optique des corps en mouvement, par *V. Lalan*. Sur un complément au théorème de *M. Borel*, par *Georges Calugoreano*. Sur les zéros des fonctions holomorphes, par *M. Biernacki*. Sur le troisième théorème de *Fredholm* relatif à une équation intégrale particulière, par *Radu Bădescu*.

Sur un théorème des „vorlesungen über Dynamik, de *Jakobi*", par *R. H. I. Germay*. Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un cercle, par *Georges Calugoreano*. Démonstration élémentaire d'un théorème de détermination à un facteur constant près d'une fonction harmonique, par *Georges Bouligand*. Sur une inègalité vérifiée par une fonction et sa dérivée d'ordre *n*, par *J. Soula*. Sur les suites de fonctions analytiques bornées dans un domaine, par *F. Leja*. Sur les sous-grupes simplement transitifs d'une groupe transitif de mouvement, par *G. Vranceanu*. Sur deux propriétés des ensembles mésurables B, par *W. Sierpinski*. Une application des images de fonctions à la construction de certains ensembles singulier, par *Casimir Kuratowski*. Sur les points accessibles dans les ensembles fermés, par *W. Wolibner*. Sur la généralisation d'un théorème de *lord Kelvin*, par *N. Botea*. Sur une équation algébrique: Application à une formule de *Taylor*, par *Th. Anghelutza*. Sur quelques propriétés des fonctions harmoniques et des fonctions préharmoniques, par *Jeaa Capoulade*. Quelques nouvelles conditions initiales pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique, par *N. Cioranesco*. Sur certaines équations intégrales, par *S. Sanielevici*.

PROBLEME REZOLVATE

1058. — *Ştiind că* $m+n=1$, *se cere să se stabilească identităţile:*

$1^0.\ C_m^3+C_m^2C_n^1+C_m^1C_n^2+C_n^3=0$

$2^0.\ C_m^4+C_m^3C_n^1+C_m^2C_n^2+C_m^1C_n^3+C_n^4=0,$

unde am notat pentru prescurtare:

$$C_p^i=\frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{i!}$$

V. ALACI

Insemnând cu E primul membru al relaţiei 1^0, scriind dezvotat, avem:

$$E=\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}+\frac{mn(m-1)}{2!}-$$

$$\frac{mn(n-1)}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

Inlocuind aci pe m prin $-n+1$, dedus din relaţia de condiţie, putem scri succesiv:

$$E=-\frac{n(n-1)(n+1)}{3!}+\frac{n^2(n-1)}{2!}=$$

$$\frac{n(n-1)^2}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=$$

$$-\frac{n(n-1)}{2!}+\frac{n(n-1)}{2!}=0$$

Prima identitate este astfel stabilită.

Pentru a stabili şi identitatea 2^0, notăm cu E_1 primul ei membru şi scriind dezvoltat avem:

$$E_1=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}+\frac{mn(m-1)(m-2)}{3!}+$$

$$\frac{mn(m-1)(n-1)}{2!2!}+\frac{mn(n-1)(n-2)}{3!}+$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

Inlocuind iarăşi pe m prin $-n+1$, dedus din relaţia de condite, putem scri succesiv:

$$E_1=\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{4!}-\frac{n^2(n-1)(n+1)}{3!}+$$

$$\frac{n^2(n-1)^2}{4}-\frac{n(n-1)^2(n-2)}{3!}+$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}=\frac{n(n-1)(n^2-n+4)}{12}-$$

$$\frac{n(n-1)(n^2-n+1)}{3}+\frac{n^2(n-1)^2}{4}=$$

$$n(n-1)\frac{n^2-n+4-4n^2+4n-4+3n^2-3n}{12}=0,$$

ceiace invederează că şi identitatea 2^0 este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Acikgheozian Nubar* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit. Craiova), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Motoc D. Mircea* (lic. Oltenita), *Ştefănescu Anibal* (Bucureşti), *Stoicescu I. Ernest* şi *Tica P. Marin* (bacalaureat, Craiova).

Altă soluţie. In „R. M. T.", anul XI, No. 11, în articolul: *O clasă de identităţi deduse prin dezvoltări în serie*, se stabileşte următoarea identitate generală:

$$(1)\qquad \sum_{i=0}^{p} C_m^{p-i}C_n^i=0,\quad p=2,3,\ldots$$

cu condiţia $m+n=1$.

Dacă în (1) luăm $p = 3$ şi $p = 4$, avem tocmai identităţile cerute.

Soluţie dată de d-nul: *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Art.).

1064. — *Să se găsească patratul perfect de forma* $abbacb$, *unde* cb *este patrat perfect, iar* ab *număr prim.*

N. MIHAILEANU

cb fiind patrat perfect poate fi:

$$01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 81,$$

şi cum ab este prim, cb poate fi numai:

$$01, 09, 49, 81.$$

b fiind 1 sau 9 şi ab fiind prim, ab nu poate fi de cât:

$$11, 31, 41, 61\ 71, 91, 19, 29, 59, 79, 89.$$

Rezultă de aci că $abbacb$ poate fi:

111101	111181	199109	199149
311301	311381	299209	299249
411401	411481	599509	599549
611601	611681	799709	799749
711701	711781	899809	899849
911901	911981		

Să căutăm care din acestea sunt patrate perfecte.

Numerile: 611601, 911901, 199149, fiind divizibile prin 3 fără a fi şi prin 9, nu sunt patrate perfecte.

Din numerile rămase, numai 299209 este patrat perfect,

$$299209 = 547^2,$$

şi ne dă singura soluţie a problemei.

Soluţii date de dnii: *Boerescu P. George* (lic. Oltenita), *Chirilă Andreiu* (lic. Timişoara), *Coandă Virgil* (lic. Milit. Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic Milit. Craiova), *Dan T. Traian* (lic. Beiuş), *Dobrescu Ştefan* (lic. Milit., Iaşi), *Drăgan Ion* (R.-Vâlcea), *Fofiu Cornel* (Beiuş), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit. Tg. Mureş), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Grigorescu Decebal* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit. Tg-Mureş), *Landmann Ş.* (Tighina), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Nenciulescu Hariton* (Tg.-Mureş), *Păunescu N.* (lic. Milit, Craiova), *Popa Gh Ioan* (Bucureşti), *Predoescu I. M.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Stoica I.* (Sub.-Lt.), *Tica P. Marin* (bacalaureat, Craiova) şi *Trică Ioan* (Constanţa).

1065. — *O persoană voeşte să parcurgă cu trenul două distanţe diferite şi posedă în acest scop două bilete de reducere, unul cu* 50% *la clasa II-a şi altul* 75% *la clasa I-a.*

Presupunând că distanţele sunt direct proporţionale cu preţurile şi că costul unui bilet de clasa I-a este $\frac{7}{5}$ *din cel de clasa II-a, se întreabă:*

1°. Ce bilet să întrebuinţeze acea persoană pe distanţa cea mai mare?

2°. In ce caz modul de întrebuinţare al biletelor ar fi indiferent?

CORNELIU GEORGESCU

Fie a preţul pe kilometru a unui bilet de clasa II-a, atunci $\frac{7a}{5}$ este preţul corespunzător unui bilet de cl. I-a.

Dacă n este numărul de kilometri a distanţei celei mici şi $n+k$ numărul de kilometri a distanţei celei mari, atunci ţinând seamă de reducerile acordate, acea persoană ar plăti pentru cele două distanţe folosind biletul de cl. II-a pe distanţa mică şi biletul de cl. I-a pe distanţa mare:

$$S = \frac{an}{2} + \frac{7a(n+k)}{20} = \frac{a}{20}(17n + 7k)$$

Aceiaşi persoană, schimbând folosinţa celor două bilete, ar plăti:

$$S_1 = \frac{a(n+k)}{2} + \frac{7an}{20} = \frac{a}{20}(17n + 10k)$$

1°. Din compararea sumelor S şi S_1, e clar că acea persoană trebuie să folosească pe distanţa cea mai mare, biletul de cl. I-a.

2°. Pentru ca modul de întrebuinţare a celor două bilete pe cele două distanţe să fie indiferent, trebuie ca:

$$S = S_1,$$

adică:

$$\frac{a}{20}(17n + 7k) = \frac{a}{20}(17n + 10k),$$

egalitate care nu are loc decât pentru $k = 0$.

Intrebuinţarea biletelor este indiferentă, dacă cele două distanţe sunt egale.

Soluţii date de d-nii: *Dan T. Traian* (bacalaureat), *Drăgan Ion* (R.-Vâlcea), *Fofiu Cornel* (bacalaureat Beiuş), *Ivănescu Cezar* (lic., Bârlad), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Pănoiu Emanoil* (lic. Carol, Craiova), *Porumbaru D.* (Tg.-Ocna), *Roşca Şt. Viorica* (lic. Craiova), *Şova C. I.* (student, Bucureşti), *Trică Petre Marin* şi *Trică S. Ioan* (Constanţa).

Observare. D-l Ivănescu Cezar (lic. Bârlad), a generalizat problema, luând în locul datelor numerice, numere absolut oarecare.

PROBLEME PROPUSE

1121. — Să se afle un număr de patru cifre diferite, divizibil prin 161, ştiind că suma divizorilor primi este 35, iar numărul tuturor divizorilor este 24.

Dacă suprimăm ultima condiţie, care sunt numerile care satisfac enunţul?

V. ALACI

1122. — Un negustor depune la o bancă o sumă de bani cu 9%. După 2 ani retrage capitalul împreună cu dobânda şi unindu-le, depune noul capital cu 10%. După 3 ani retrage capitalul împreună cu dobânda lui şi unindu-le iarăşi, formează noul capital pe care'l depune cu 12% şi astfel după un an are un venit de 13806 lei. Care a fost capitalul de la început şi care va fi suma ce o va avea la urmă?

VIRGIL CLAUDIAN

1123. — Doi călători pleacă la aceiaşi oră, respectiv din comunele A şi B spre comuna C, în aceiaşi direcţie. Primul călător pleacă cu trăsura din A, al doilea, pe picioare din B şi ajung deodată în C, după 3 ore şi 20 minute de mers. Care este viteza în metri pe minut a fiecăruia, dacă distanţa între comunele A şi B este de 9 Km. şi călătorul pe picioare face 4 minute şi 30 secunde mai mult pe kilometru decât trăsura.

I. DUMITRIU-DADA

1124. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ x^3+y^3+z^3=153 \\ (x+y)(y+z)(z+x)+xyz=207 \end{cases}$$

CEZAR IVANESCU

1125. — Dreapta Δ taie laturile unui triunghiu ABC în a', b', c'; în aceste puncte ducem trei drepte care formează cu laturile triunghiului ABC unghiul α şi care dau naştere triunghiului abc. Să se demonstreze:

1°. Că dreptele Aa, Bb, Cc sunt concurente într'un punct M situat pe cercul circumscris triunghiului ABC.

2°. Că cercurile circumscrise patrulaterelor $Aac'b'$, $Bba'c'$, $Cca'b'$ trec prin punctul M şi printr'un alt punct N situat tot pe cercul circumscris lui ABC.

3°. Să se găsească locul geometric al centrului cercului circumscris lui abc, când dreapta Δ variază oricum în plan.

ALEXANDRU NICOLAU

1126. — Se consideră trei puncte colineare A, B, C şi un al patrulea punct P în planul lor. Fie P_a, P_b, P_c punctele diametral opuse lui P respectiv în cercurile PBC, PCA, PAB. Să se dovedească că punctele P, P_a, P_b, P_c sunt conciclice.

CEZAR COSNITA

1127. — Să se arate că în orice triunghiu există relaţia:

$$\frac{(a^2+h_c^2)(b^2+h_a^2)(c^2+h_b^2)}{(a^2+h_b^2)(b^2+h_c^2)(c^2+h_a^2)} = \frac{(a^2-h_c^2)(b^2-h_a^2)(c^2-h_b^2)}{(a^2-h_b^2)(b^2-h_c^2)(c^2-h_a^2)},$$

unde a, b, c sunt laturile triunghiului, iar h_a, h_b, h_c înălţimele corespunzătoare.

ION MARGINEANU

1128. — Să se arate că, dacă notaţiile sunt cele obicinuite într'un triunghiu, avem identitatea:

$$r_a^3+r_b^3+r_c^3=(4R+r)^3-12Rp^2$$

S-LT. IOAN C. SAVIN

Observare. Enunţul problemei 1119 începe astfel. Dacă n este un întreg nedivizibil prin 3, etc.

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și *J. Tschlek*, Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann*, La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale*, Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez*, Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell*, Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff*, Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera*, S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky*, Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler*. Washington (Statele Unite), *J. Shohat*, Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville*, Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault*, Le Mans (Francia), *O. Szász*, Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti*, Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se gasesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XII. 15 SEPTEMBRIE 1932 NO. 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 M. V. THÉBAULT SPHÈRES REMARQUABLES DU TÉTRAÈDRE
2. D. V. IONESCU GENERALIZAREA UNEI PROBLEME A LUI NEWTON
3. NOTE MATEMATICE: 14, 15, 16, 17
4. BIBLIOGRAFIE
5. PROBLEME REZOLVATE: 1051, 1061, 1066 1069
6 PROBLEME PROPUSE: 1129-1136
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Prof. **C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XII — NO 7. TIMISOARA, 15 SEPTEMBRIE 1932

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

SPHÈRES REMARQUABLES DU TÉTRAÈDRE

par M. V. THÉBAULT, le Mans (France)

1. *J. Neuberg* avait proposé la question suivante, *(Mathesis,* 1915 p. 32):

Étant donné un tétraèdre A B C D, *construire quatre sphères égales entre elles, se coupant au même point, et tangentes, chacune, à trois des faces du tétraèdre.*

Nous avons traité un sujet analogue pour le *triangle* avec des compléments assez étendus, *(Annales de la Société Scientifique de Bruxelles,* 1921 pp. 121—126), puis nous l'avons étendu aux polygones de n côtés inscrits à un cercle et circonscrits à un autre cercle, *(Mathesis,* 1926 p. 306). Enfin, tout récemment, nous avons généralisé la question de *J. Neuberg* en remplaçant le point de concours des quatre sphères par une cinquième sphère de rayon donné, *orthogonale* aux quatre premières.

2. On peut encore généraliser ainsi:

Étant donné un tétraèdre A B C D, *construire quatre sphères égales entre elles, tangentes à une même sphère* (S), *de rayon donné, et chacune à trois des plans des faces du tétraèdre.*

Cette question est d'ailleurs implicitement contenue dans la solution que nous avons donnée de la généralisation précitée du problème du géomètre belge, *(Mathesis,* 1932 p. 98).

Mais voici un cas particulier de cette figure qui nous paraît interessant:

Étant donné un tétraèdre A B C D, *construire ciuq sphères égales eutre elles, dont l'une est tangente aux quatre autres, et chacune de celles-ci à trois des plans du tétraèdre.*

Soient (α), (β), (γ), (δ), les quatre sphères égales tangentes chacune à trois des faces du tétraèdre correspondant aux sommets A, B, C, D, et (S) la *cinquième* sphère qui touche les quatre premières.

Pour que (S) soit *tangente* et *égale* à chacune des sphères (α), (β), (γ), (δ), il est nécessaire qu'elle soit *réelle,* puis *extérieure* à ces quatre sphères. Autrement, en effet, les cinq sphéres ne pourraient avoir leurs rayons égaux.

Pour fixer les idées, supposons la sphère (S) *intérieure* au tétraèdre.

Les centres a, β, γ, δ, étant équidistants des plans de trois des faces du tétraèdre, sont sur les *bissectrices* [1]) des angles trièdres formés par ces plans. Trois des centres β, γ, δ, sont situés d'un même côté du plan B C D, sans quoi les sphères (β), (γ), (δ), ne pourraient toutes trois toucher la sphère (S). Le plan $\beta\gamma\delta$ est donc parallèle au plan B C D, de même les plans $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$ sont respectivement parallèles aux plans C D A, D A B, A B C, et le tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$ est homothétique au tétraèdre A B C D, le centre d'homothétie étant celui de l'une des sphères tangentes aux quatre plans des faces de A B C D.

Supposons donc que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$, concourent en I, centre de l'une des sphères, de rayon r, tangente aux quatre plans des faces du tétraèdre. Soit x le rayon commun des sphères (α), (β), (γ), (δ), et (S), R celui de la sphère (O) circonscrite au tétraèdre A B C D.

Le centre S est visiblement le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$, (le rayon de cette sphére étant $2x$), et le point S est situé sur la droite I O.

---

[1]) Nous appelons *bissectrice* d'un angle trièdre la droite commune aux trois plans bissecteurs de ses dièdres.

Les deux expressions du rapport d'homothétie des tétraèdres $\alpha\beta\gamma\delta$ et ABCD,

$$2x : R \quad \text{et} \quad (r - x) : r,$$

donnent

$$x = \frac{Rr}{R + 2r}.$$

Ainsi sont déterminées les *cinq* sphères égales que l'on se proposait de construire. La position du centre S sur IO se précise ainsi :

$$\overline{IS} : \overline{IO} = 2x : R = 2r : (R + 2r).$$

Si l'on suppose que I est le centre de la sphère inscrite au tétraèdre ABCD, il *y a une* solution. Le même raisonnement s'applique aux centres I_a, I_b, I_c, I_d, des sphères exinscrites aux trièdres tronqués et à ceux I_1, I_2, I_3, des sphères des combles. Il y a donc, en général, huit solutions du problème.

Remarques. a) Plus généralement, on peut poser le problème de déterminer la sphère (S) de telle façon que son rayon soit dans un rapport donné k avec celui des sphères égales $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$.

b) Ces développements peuvent être appliqués aussi très facilement au plan et conduisent à des *cercles remarquables du triangle* qui sont probablement nouveaux.

GENERALIZAREA UNEI PROBLEME A LUI NEWTON

de D. V. IONESCU
PROFESOR LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE IN CLUJ

Este bine cunoscut rezultatul următor datorit lui *Newton :*

Dacă un punct material M, *descrie un cerc cu o acceleraţie îndreptată către un punct* A *al cercului, atunci acceleraţia este invers proporţională cu puterea cincea a razei vectoare* AM.

Vreau să arăt în acest articol, că dacă un punct M descrie un cerc cu o acceleraţie îndreptată către un punct fix A, oarecare, atunci acceleraţia este dată de formula

$$(1) \qquad \vec{J} = k \frac{\vec{AM}}{(P - \overline{AM}^2)^3},$$

unde P reprezintă puterea punctului A în raport cu cercul, iar k o constantă.

Este evident că formula aceasta conţine rezultatul lui *Newton,* pentrucă dacă punctul A este pe cerc, puterea P este nulă, şi atunci rezultă că acceleraţia este învers proporţională cu puterea cincea a lui AM.

Pentru a demonstra formula (1), să luăm centrul cercului, O, ca origină a axelor de coordonate, dreapta $\overline{OA}$ ca axă Ox şi perpendiculara în O pe Ox ca axă Oy. Notând cu φ unghiul pe care îl face OM cu Ox, coordonatele lui M vor fi

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= R\cos\varphi \\ y &= R\sin\varphi, \end{aligned}$$

R fiind raza cercului.

Scriind că mişcarea punctului M se face după legea ariilor în raport cu punctul A, avem ecuaţia

$$(3) \qquad (x - a)\frac{dx}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C,$$

a fiind absciza lui A şi C, constanta ariilor.

Inlocuind în ecuaţia (3) pe x şi y în funcţie de φ, vom avea :

$$\left[(R\cos\varphi - a)\cos\varphi + R\sin^2\varphi\right]\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{R},$$

sau :

$$(4) \qquad (R - a\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{R}$$

Integrând această ecuaţie se găseşte legea mişcării şi anume :

$$(5) \qquad \varphi - \frac{a}{R}\sin\varphi = \frac{C}{R^2}t,$$

luând ca moment iniţial $t = o$, momentul când $\varphi = o$.

Ecuaţia precedentă care dă pe φ în funcţie de t, este o ecuaţie transcendentă, bine cunoscută, care se numeşte ecuaţia lui *Kepler,* şi care se întâlneşte în problema mişcării planetelor.

Componentele vitezei punctului M pe axele Ox şi Oy se deduc cu uşurinţă, derivând ecuaţiile (2) şi ţinând seama de ecuaţia (4). Se găseşte

$$\frac{dx}{dt} = -R\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = R\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

adică :

$$(6)\qquad \frac{dx}{dt} = -\frac{C\sin\varphi}{R - a\cos\varphi}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C\cos\varphi}{R - a\cos\varphi}$$

Odograful mişcării este reprezentat de ecuaţiile

$$\xi = -\frac{C\sin\varphi}{R - a\cos\varphi}, \quad \eta = \frac{C\cos\varphi}{R - a\cos\varphi}.$$

Eliminând φ între aceste ecuaţii se găseşte că odograful este *conica.*

$$\xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{a}{R}\right)^2 \left(\eta + \frac{C}{a}\right)^2,$$

care are centrul cercului ca focar, $\frac{a}{R}$ ca excentricitate, şi dreapta $y = -\frac{C}{a}$ ca directoare.

Dacă punctul A este în interiorul cercului, excentricitatea conicei este mai mică decât unu, şi prin urmare odograful este o elipsă. Când punctul A este în exteriorul cercului, odograful este o iperbolă, iar când A este pe cerc, odograful este o parabolă.

Observăm că coeficientul $\frac{a}{R}$ din ecuaţia mişcărei (5) are o semnificare geometrică, este excentricitatea odografului, care am văzut mai sus că este o conică.

Derivând ecuaţiile (6) în raport cu timpul, găsim componentele acceleraţiei pe axele Ox, Oy şi anume :

$$(7)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{C^2}{R}\,\frac{a - R\cos\varphi}{(R - a\cos\varphi)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{C^2}{R}\,\frac{R\sin\varphi}{(R - a\cos\varphi)^3}$$

Observăm întâiu că $a - R\cos\varphi$ şi $-R\sin\varphi$, sunt componentele vectorului $\overrightarrow{MA}$. Apoi observăm că putem scrie :

$$R - a\cos\varphi = \frac{1}{2R}(2R^2 - 2aR\cos\varphi)$$

$$= \frac{1}{2R}[x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - (a^2 - R^2)]$$

$$= \frac{1}{2R}[(x-a)^2 + y^2 - (a^2 - R^2)]$$

adică :

$$R - a\cos\varphi = -\frac{1}{2R}\left[a^2 - R^2 - \overline{AM}^2\right].$$

Insă $a^2 - R^2$ reprezintă puterea P a punctului A în raport cu cercul, aşa că :

$$R - a\cos\varphi = -\frac{1}{2R}(P - \overline{AM}^2).$$

Rezultă atunci, că formulele (7) care dau componentele acceleraţiei pe axele Ox şi Oy, se pot condensa în formula vectorială :

$$\overrightarrow{J} = 8C^2R^2\,\frac{\overrightarrow{AM}}{(P - \overline{AM}^2)^3}.$$

Formula (1) este deci demonstrată.

NOTE MATEMATICE

14. — *Sur le cercle orthogonal à trois cercles donnés.*

1. Soient trois cercles (A, l), (B, m), (C, n), le cercle (ω, ϱ) leur est orthogonal et le cercle (O) circonscrit au triangle ABC. Posons $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; $O\omega = d$.

La différence des puissances du point ω par rapport aux cercles (O) et (A), (O) et (B), (O) et (C), est constante, car elle s'exprime

$$(P_O) - (P_A) = d^2 - R^2 - \varrho^2 = 2\overline{O\omega}.\delta_a.$$

Si $\delta_a, \delta_b, \delta_c$, désignent les distances du point ω aux radicaux du cercle (O) avec chacun des cercles (A), (B), (C),

$$\delta_a = \delta_b = \delta_c = (d^2 - R^2 - \varrho^2) : 2d.$$

Les axes radicaux du cercle (O) avec chacun des cercles (A), (B), (C), forment donc un triangle dont l'un des cercles tritangents est *concentrique* au cercle orthogonal aux trois cercles considérés.

Remarque. Ces resultats s'appliquent à la sphère orthogonale à quatre sphères données (A), (B), (C) (D).

Le centre de la sphère orthogonale à quatre sphères coïncide avec celui de l'une des, sphères

tangentes aux quatre plans des faces du tetraèdre formé par les plans radicaux de la sphère (O) *circonscrite à* A B C D *avec chacune des sphères* (A), (B), (C), (D) [1].

2. On obtient assez facilement l'expression de la distance $\overline{O\omega} = d$, en fonction de l, m, n, et des éléments du triangle A B C.

Soient A_1, B_1, C_1, les milieux des côtés B C, C A, A B, x, y, z, les projections orthogonales du point ω sur ces côtés. Posons $\overline{XA_1} = x$, $\overline{YB_1} = y$, $\overline{ZC_1} = z$. On obtient facilement.

$$(1) \qquad \overline{XA_1} = x = \frac{m^2 - n^2}{2a},$$

$$\overline{YB_1} = y = \frac{n^2 - l^2}{2b}, \quad \overline{ZC_1} = z = \frac{l^2 - m^2}{2c}.$$

Mais, comme l'on sait que,

$$a\,y\,z + b\,z\,x + c\,x\,y = -\frac{d^2 S}{R},$$

S étant l'aire du triangle A B C, les relations (1) introduites dans cette formule donnent, après quelques réductions,

$$d^2 = -\frac{(m^2 - n^2)(n^2 - l^2)(l^2 - m^2)}{16 S^2} \times \left[\frac{a^2}{m^2 - n^2} + \frac{b^2}{n^2 - l^2} + \frac{c^2}{l^2 - m^2}\right].$$

V THÉBAULT

15. — *Problema 1063*, a cărei soluție s-a publicat la pagina 59 Vol. XII al revistei, se poate enunța mai general sub forma:

Să se găsiască un număr de 3 cifre altfel ca produsul a 2 cifre să fie egal cu cubul produsului uneia din aceste cifre cu cifra a treia.

Conform acestui enunț trebuie să avem:

$$a \times b = a^3 \times c^3\,;\; a \times b = b^3 \times c^3\,;\; b \times c = b^3 \times a^3.$$

I. Presupun deocamdată toate cifrele diferite de zero. In acest caz egalitățile precedente devin, după simplificare:

$$(1) \quad b = a^2 \times c^3\,; \quad a = b^2 \times c^3\,; \quad c = b^2 \times a^3\,; \ldots$$

[1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, **V. Thébault, 1923 p. 189.**

Se observă că dacă avem soluțiile întregi ale primei egalități din șirul (1), soluțiile celorlalte egalități se deduc prin simple mutări circulare. Consider deci prima egalitate.

De oarece

$$0 < b < 10$$

urmează că a și c sunt cifre al căror patrat, respectiv cub, este mai mic de cât 10. La această condiție răspund.

$$(2) \qquad a^2 = 1\,;\; 4\,;\; 9$$

$$(3) \qquad c^3 = 1\,;\; 8$$

Pentru a găsi pe b se face produsul fie-cărui număr din șirul (2) cu fie-care număr din șirul (3) și se reține numai produsele mai mici ca 10. Obțin astfel următoarele soluții pentru primul caz:

a	1	1	2	3
b	1	8	4	9
c	1	2	1	1
$a\,b\,c$	111	182	41	391

Făcând toate permutările circulare între litere, se găsește ușor că toate soluțiile problemei sunt cele cuprinse în următorul tabel, în care coloana I cuprinde egalitatea din șirul (1) căreia î-i corespund soluțiile găsite.

$b = a^2 \times c^3$	111	182	241	391
$a = b^2 \times c^3$	111	812	421	931
$c = b^2 \times a^3$	111	218	124	139
$a = b^3 \times c^2$	111	821	412	913
$b = a^3 \times c^2$	111	281	142	193
$c = b^3 \times a^2$	111	128	214	319

Total, 18 soluțiuni diferite, plus una comună fie-cărui caz. Dacă se mai impune vre-o condiție, cum s-a impus în enunțul problemei 1063, atunci numărul soluțiilor se restrânge; în particular pentru condiția finală a problemei 1063 se găsesc numai soluțiile

182 și 142.

De observat că între soluții se mai găsesc numerele 241 și 281 *din care* scăzând răsturnatele lor se obține tot diferența 99.

II. Presupunem că numărul căutat poate avea şi cifre egale cu zero. In acest caz nu se mai pot face simplificările care au condus la şirul (1). Elimin de la început presupunerea $a = 0$, pentru că ea conduce la soluţii formale.

Fie $b = 0$. Prima din cele 6 egalităţi arată că $c = 0$ de oare ce $a \neq 0$. Deci prima egalitate admite soluţiile $a\,0\,0$, în care a poate avea ori care din valorile $1, 2, \ldots 9$.

A doua egalitate arată că a şi c pot fi ori ce cifră deci soluţia este ori care din numerele $a\,0\,c$.

Continuând analiza pe această cale se găseşte pentru $b = 0$, că soluţiile sunt numere de forma

$$a\,0\,0 \quad \text{şi} \quad a\,0\,c,$$

iar pentru $c = 0$ soluţiile sunt numere de forma

$$a\,0\,0 \quad \text{şi} \quad a\,b\,0.$$

Căutând între aceste soluţii pe acelea din care scăzând fie inversatul lor dau restul 99 se găsesc soluţiile

$100 - 001 = 99$;

$1\,b\,0 - 0\,b\,1 = 99$; b fiind oare care.

$a\,0\,(a-1) - (a-1)\,0\,a = 99$; a fiind oare care.

COL. GH BUICLIU

16. — *Asupra problemei 1034.*

Această problemă rezolvată la pag. 21 anul 12 R. M. T. i se poate da o altă soluţie mai simplă:

Consider în general sistemul:

$$(1) \quad \begin{cases} x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = a \\ x^n y^n z^n = x^n + y^n + z^n \\ x^{2n} y^{2n} + y^{2n} z^{2n} + x^{2n} z^{2n} = b \end{cases}$$

Insemn.

$$x^n = u \quad y^n = v \quad z^n = w,$$

sistemul (1) devine:

$$(2) \quad \begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = a \\ u\,v\,w = u + v + w \\ u^2 v^2 + u^2 w^2 + v^2 w^2 = b \end{cases}$$

Insemn.

$$(3) \quad u + v + w = u\,v\,w = \lambda$$

De asemeni

$$(\Sigma u\,v)^2 = \Sigma u^2 v^2 + 2\,u\,v\,w\,(\Sigma u)$$

Ţinând seama de ultima ecuaţie din (2) şi de (3) avem:

$(\Sigma u\,v)^2 = b + 2\lambda^2$ de unde: $\Sigma u\,v = \pm\sqrt{b + 2\lambda^2}$

Avem deci sistemul:

$$\begin{cases} u + v + w = \lambda \\ \Sigma u\,v = \pm\sqrt{b + 2\lambda^2} \\ u\,v\,w = \lambda \\ \Sigma u^2 = a \end{cases}$$

unde a şi b sunt cantităţi cunoscute iar λ necunoscut.

u, v şi w sunt rădăcinele ecuaţiei de gradul al 3-lea.

$$(4) \quad t^3 - \lambda t^2 \pm \sqrt{b + 2\lambda^2}\, t - \lambda = 0$$

După formulele lui Newton avem:

$$(5) \quad \begin{aligned} S_1 - \lambda &= 0 \\ S_2 - \lambda S_1 \pm 2\sqrt{b + 2\lambda^2} &= 0 \end{aligned}$$

unde:

$$S_1 = u + v + w$$
$$S_2 = u^2 + v^2 + w^2$$

Punând în (5) valorile lui S_1 şi S_2 avem:

$$a - \lambda^2 \pm 2\sqrt{b + 2\lambda^2} = 0$$

Scăpând de radical şi ordonând după λ avem:

$$\lambda^4 - 2(a + 4)\lambda^2 + a^2 - 4b = 0$$

De unde găsim 4 valori pentru λ.

$$(6) \quad \lambda = \pm\sqrt{a + 4 \pm 2\sqrt{2a + b + 4}}$$

E deajuns să punem valoarea lui λ în (4) şi rezolvind-o, vom afla.

$$x = \sqrt[n]{\varphi(a, b)}\,, \quad y = \sqrt[n]{f(a, b)}\,, \quad z = \sqrt[n]{\psi(a, b)}$$

pentru fiecare din valorile lui λ în parte.

Dacă în (6) facem:

$$a = 14\,, \quad b = 49\,, \quad n = 1$$

găsim:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = +6 \quad \lambda_3 = -6$$

Punând pe rând aceste valori în (4) găsim:

I. $t^3 \pm 7t = 0$ de unde:

$$t_1 = 0\ ,\quad t_2 = -\sqrt{7}\ ,\quad t_3 = \sqrt{7}$$

$$t_1' = 0\ ,\quad t_2' = -\sqrt{-7}\ ,\quad t_3' = \sqrt{-7}$$

Am găsit un rând de soluţii reale şi un altul de soluluţii imaginare — fiecare putând da naştere la încă *6 soluţii* — adică *6 soluţii reale şi 6 imaginare.*

II. $t^3 - 6t^2 \pm 11t - 6 = 0$, care admite:

$$t_1 = 1\ ,\quad t_2 = 2\ ,\quad t_3 = 3$$

t_1' = real, t_2' şi t_3' imaginari.

Adică *6 soluţii reale* şi *6 mixte.*

III. $t^3 + 6t^2 \pm 11t + 6 = 0$, unde

$$t_1 = -1\ ,\quad t_2 = -2\ ,\quad t_3 = -3$$

t_1' = real t_2' şi t_3' = imaginari.

Adică *6 soluţii reale* şi *6 mtxte.*

In total problema admite 18 soluţii date de tabelul de la pagina 22. Au fost celelalte 18 soluţii anume 6 imaginare şi 12 mixte.

S-LT IOAN C. SAVIN

17. — *O metodă pentru stabilirea unor identităţi trigonometrice.*

Fiind dat un triunghiu oarecare A B C şi AA_1, BB_1, CC_1 trei ceviene concurente în P, se ştie că avem:

$$1^0.\quad \frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{PC_1}{CC_1} = 1$$

$$2^0.\quad \frac{PA}{AA_1} + \frac{PB}{BB_1} + \frac{PC}{CC_1} = 2;$$

A_2, B_2, C_2 fiind proecţiile punctului P pe laturile triunghiului avem:

$$3^0.\quad \frac{PA_2}{h_a} + \frac{PB_2}{h_b} + \frac{PC_2}{h_c} = 1$$

h_a, h_b, h_c fiind înălţimile triunghiului.

Voiu obţine identităţile de mai jos, făcând pe P să concidă cu diferite puncte remarcabile ale triunghiului şi ţinând seama de anumite relaţii între elementele lui.

I. Dacă P este ortocentrul triunghiului, avem:

$$PA_1 = 2R\cos B\cos C,\quad AA_1 = 2R\sin B\sin C,$$

$$PA = 2R\cos A,\ \text{etc.}$$

deci relaţiile 1° şi 2° devin:

(1) $$\cot B\cot C + \cot C\cot A + \cot A\cot B = 1$$

(2) $$\frac{\cos A}{\sin B\sin C} + \frac{\cos B}{\sin C\sin A} + \frac{\cos C}{\sin A\sin B} = 2;$$

Am obţinut astfel două identităţi trigonometrice cunoscute.

Cum încă putem scri:

$$PA = a\cot A,\quad PB = b\cot B,\quad PC = c\cot C$$

obţinem identitatea:

(3) $$\frac{a\cot A}{h_a} + \frac{b\cot B}{h_b} + \frac{c\cot C}{h_c} = 2$$

care, ţinând seama că $\frac{1}{h_a} = \frac{2R}{bc}$ etc. devine:

(4) $$\frac{a\cot A}{bc} + \frac{b\cot B}{ca} + \frac{c\cot C}{ab} = \frac{1}{R}$$

Ştiind că $a h_a = b h_b = c h_c = 2S$ şi privind identitatea (3) obţinem:

(5) $$a^2\cot A + b^2\cot B + c^2\cot C = 4S$$

identitate cunoscută.

II. Dacă P este centrul cercului circumscris atunci $PA = PB = PC = R$ şi deci însemnând $AA_1 = d_a$, $BB_1 = d_b$, $CC_1 = d_c$, avem:

(6) $$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} = \frac{2}{R}$$

(Problema 3159 G. M.).

Punând $PA_2 = i_a$, $PB_2 = i_b$, $PC_2 = i_c$, relaţia 3° devine:

(7) $$\frac{i_a}{h_a} + \frac{i_b}{h_b} + \frac{i_c}{h_c} = 1$$

şi ţinând seama că $a h_a = b h_b = c h_c = 2S$ rezultă:

(8) $$a i_a + b i_b + c i_c = 2S$$

Dar $a = 2R\sin A$, etc. Avem deci identitatea:

(9) $$i_a\sin A + i_b\sin B + i_c\sin C = \frac{S}{R}$$

(Problema 3889 G. M.).

III. Dacă P este centrul cercului înscris relaţia 3° devine:

(10) $$\frac{r}{h_a} + \frac{r}{h_b} + \frac{r}{h_c} = 1 \text{ sau } \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

identitate destul de cunoscută.

IV. Dacă P este centrul cercului lui *Euler* se ştie că avem: $PA_2 = \frac{HA' + OA''}{2}$ H şi O fiind ortocentrul şi centrul cercului circumscris, iar A' şi A'' proecţiile lor pe B C. Insă $HA' = 2R\cos B\cos C$, $OA'' = R\cos A$.

Deci $PA_2 = \frac{R}{2}(2\cos B\cos C + \cos A) =$

$\frac{R}{2}[2\cos B\cos C - \cos(B+C)] = \frac{R}{2}\cos(B-C)$.

Analog avem:

$$PB_2 = \frac{R}{2}\cos(C-A)\ ,\quad PC_2 = \frac{R}{2}\cos(A-B)$$

Introducând aceste valori în relaţia 3⁰ găsim:

$$(11)\quad \frac{\cos B-C)}{h_a} + \frac{\cos(C-A)}{h_b} + \frac{\cos(A-B)}{h_c} = \frac{2}{R}$$

Ştiind că $\frac{1}{h_a} = \frac{2R}{bc}$, etc. avem:

$$(12)\quad \frac{\cos(B-C)}{bc} + \frac{\cos(C-A)}{ca} + \frac{\cos(A-B)}{ab} = \frac{1}{R^2}$$

Inmulţind identitatea (12) cu abc obţinem:

$$(13)\quad a\cos B-C) + b\cos(C-A) + c\cos(A-B) = \frac{4S}{R}$$

V. Dacă P este ortocentrul triunghiului format de centrele I_a, I_b, I_c, ale cercurilor exînscrise, atunci putem scri:

$$\frac{PA}{AI_a} + \frac{PB}{BI_b} + \frac{PC}{CI_c} = 1\ ,\ \frac{PI_a}{AI_a} + \frac{PI_b}{BI_b} + \frac{PI_c}{CI_c} = 2$$

Dar conform celor stabilite în „R. M. T." Anul XII nota 2 avem:

$$PA = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\ ,\quad AI_a = 4R\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$PI_a = 4R\sin\frac{A}{2}$, etc. şi deci relaţiile de mai sus devin:

$$(14)\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 1$$

$$(15)\quad \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = 2$$

VI. In sfârşit dacă P este centrul cercului lui *Euler* al triunghiului $I_a I_b I_c$, ţinând seamă de relaţiile stabilite în nota citată mai sus şi procedând ca la exemplu IV, găsim identitatea:

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = 4$$

Exemplele de mai sus sunt suficiente pentru a arăta, cum printr'o metodă simplă, putem stabili interesante identităţi între elementele unui triunghiu.

CEZAR IVANESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVII, No. 12, August 1932.

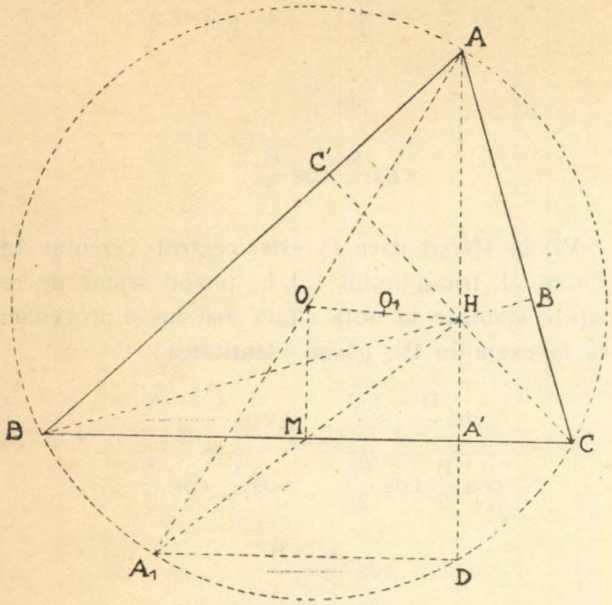
Observaţiuni în legătură cu o propoziţiune a D-lui *Pompeiu*, de *N. Botea*.

PROBLEME REZOLVATE

1051. — *Să se construiască triunghiul* A B C, *cunoscând ortocentrul* H, *centrul* O_1 *al cercului celor nouă puncte şi* A_1 *punctul diametral opus vârfului* A *în cercul circumscris.*

CEZAR IVANESCU

Considerăm triunghiul A B C construit şi fie H, O_1 şi A_1 punctele date.



Ştim că în orice triunghi centrul cercului celor nouă puncte este la mijlocul segmentului ce uneşte ortocentrul cu centrul cercului circumscris. Tot astfel ştim că dreapta ce uneşte ortocentrul cu punctul A_1 diametral opus lui A, trece prin mijlocul M al lui B C şi e împărţită de acest punct M în două părţi egale, ceeace uşor de altfel observăm prin considerarea paralelogramului $A_1 B H C$. De aci rezultă următoarea construcţie:

Luăm simetricul lui H în raport cu O_1 şi am centrul O al cercului circumscris, pe care îl construim uşor raza lui fiind $O A_1$. Apoi prin mijlocul M a lui $A_1 H$ ducem o perpendiculară pe O M care va tăia cercul circumscris în punctele B şi C.

Prelungim pe $A_1 O$ până întâlneşte cercul circumscris, şi avem astfel vârful A al triunghiului. Unim A cu B şi C, şi B cu C şi avem astfel construit triunghiul A B C.

Soluţii date de d-rele: *Abramescu Mariana* (studentă, Cluj), *Hortopan Ana* (studentă, Cluj), *Leber Margareta* (studentă, Cluj), *Szebo Ioana* (studentă, Cluj), *Ţerna Maria* (studentă, Cluj) şi de d-nii: *Ioanin C. Gh.* (lic. Carol, Craiova), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Popa Gh. Ioan* (Bucureşti) şi *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova).

1061. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos y = 3(\sin x - \cos y) \\ \sin x + \cos^2 y = \frac{5}{2}(\sin x - \cos y) \end{cases}$$

I. Dumitriu-Dada

Scăzând ecuaţia 2-a din prima, obţinem:

$$\sin^2 x - \cos^2 y - (\sin x - \cos y) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos y)$$

Această ecuaţie se descompune astfel:

$$(\sin x - \cos y)(\sin x + \cos y - \frac{3}{2}) = 0,$$

de unde deducem:

$$\sin x = \cos y$$

$$\sin x + \cos y - \frac{3}{2} = 0$$

Sistemul dat este deci echivalent cu sistemele:

$$(1) \quad \begin{cases} \sin x = \cos y \\ \sin^2 x + \cos y = 3(\sin x - \cos y) \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \sin x + \cos y - \frac{3}{2} = 0 \\ \sin^2 x + \cos y = 3(\sin x - \cos y) \end{cases}$$

In sistemul (1), ecuaţia 2-a în virtutea primei, devine:

$$\sin x(\sin x + 1) = 0,$$

care ne dă:

$$\sin x = 0, \quad \text{deci:} \quad x = k\pi, \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

şi,

$$\sin x = -1, \quad \text{deci:} \quad x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}, (k = 0, 1, 2, .)$$

Pentru, $x = k\pi$, prima ecuaţie din (1) ne dă:

$$\cos y = 0, \quad \text{deci:} \quad y = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

Pentru, $x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$ prima ecuaţie din (1) ne dă:

$$\cos y = -1, \quad \text{deci:} \quad y = (2k + 1)\pi, \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

Astfel sistemul (1) ne dă sistemele de soluţii:

$$(3)\quad \begin{cases} x = k\pi \\ y = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$(4)\quad \begin{cases} x = (4k+1)\dfrac{\pi}{2} \\ y = (2k+1)\pi \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Trecem acum la rezolvarea sistemului (2). In sistemul (2) ecuație 2-a în virtutea primei devine:

$$\sin^2 x + \frac{3}{2} - \sin x = 3\left(\sin x - \frac{3}{2} + \sin x\right)$$

$$\sin^2 x - 7\sin x + 6 = 0$$

De aci deducem:

$$\sin x = 6, \quad \sin x = 1$$

Ecuația, $\sin x = 6$, este imposibilă pentru arce reale, rămâne ecuația:

$$\sin x = 1, \text{ deci: } x = (4k+1)\frac{\pi}{2}, \ (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

și atunci prima ecuație din (2), ne dă:

$$\cos y = \frac{1}{2}, \text{ deci: } y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \ (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Sistemul (2) este deci echivalent cu sistemul:

$$(5)\quad \begin{cases} x = (4k+1)\dfrac{\pi}{2} \\ y = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Sistemul dat, admite deci sistemele de soluții (3), (4) și (5).

Soluții date de d-nii: *Acikgheozian Nubar* (lic. Spiru-Haret, București), *Chirică I. Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Dan T. Traian* (lic. Beiuș), *Dumitru Zamfir* (Șc. Navală), *Fofiu Cornel* (lic. Beiuș), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Lățea P. C-tin* (Șc. Milit. de Artilerie), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Mereuță Emilian* (student, București), *Motoc D. Mircea* (lic. Oltenița), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București), *Nenciulescu Hariton* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Pănoiu Emanoil* (lic. Carol, Craiova), *Șova-Grigoreni C. I.* (București), *Ștefănescu Anibal* (București), *Stoicescu I. Ernest* și *Tica Petre Marin* (Șc. Milit. de Artilerie).

1066. — *Să se rezolve sistemul.*

$$\begin{cases} (x-y)(xy-1) = axy \\ (x^2-y^2)(x^2y^2-1) = 11\,ax^2y^2 \end{cases}$$

Să se considere cazul particular, $a = 3$.

IOAN CURCHI

Impărțind ecuația a doua cu prima, avem:

$$(x+y)(xy+1) = 11xy$$

Sistemul dat e echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} (x-y)(xy-1) = axy \\ (x+y)(xy+1) = 11xy \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} x^2y + y - xy^2 - x = axy \\ x^2y + y + xy^2 + x = 11xy \end{cases}$$

Acest sistem se mai poate scri:

$$\begin{cases} xy\left(x + \dfrac{1}{x} - y - \dfrac{1}{y}\right) = a \\ xy\left(x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y}\right) = 11 \end{cases}$$

De aci deducem sistemul de soluții:

$$(1)\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

și sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} - y - \dfrac{1}{y} = a \\ x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} = 11 \end{cases}$$

Prin adunare și scădere obținem:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{11+a}{2} \\ y + \dfrac{1}{y} = \dfrac{11-a}{2} \end{cases}$$

Aducând la formă întreagă, avem:

$$\begin{cases} 2x^2 - (11+a)x + 2 = 0 \\ 2y^2 - (11-a)y + 2 = 0 \end{cases}$$

Aceste ecuații rezolvate ne dau, sistemul de soluții:

$$(2)\quad \begin{cases} x = \dfrac{11 + a \pm \sqrt{(11+a)^2 - 16}}{4} \\ y = \dfrac{11 - a + \sqrt{(11-a)^2 - 16}}{4} \end{cases}$$

Sistemul de ecuații dat, admite ca sisteme de soluții (1) și (2).

In cazul particular, $a = 3$, sistemul dat, admite sistemele de soluții:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{7\pm\sqrt{45}}{2} \\ y=2\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Soluții date de d-nii: *Acikgheozian Nubar, Boerescu P. George* (lic. Oltenița), *Coandă Virgil* (lic. Milit., Craiova) *Cojocaru Marin* (lic. Milit., Craiova), *Dan T. Traian, Dobrescu Ștefan* (lic. Milit., Iași), *Drăgan Ion* (R.-Vâlcea) *Dumitru Zamfir* (Șc. Navală), *Dini Al. Ioan* (Șc. Milit de Art.), *Fofiu Cornel* (lic. Beiuș), *Gheorghe Valeriu* (Șc. Milit. Tg.-Mureș), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureș) *Ivănescu Cezar* (lic Bârlad), *Landmann Ș.* (Tighina), *Lățea P. C-tin* (Șc. Milit. de Artilerie), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Motoc D. Mircea* (Oltenița), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București), *Nenciulescu Hariton* (lic. Milit, Tg.-Mureș), *Pănoiu Emanoil* (lic. Carol, Craiova), *Păunescu N.* (lic Milit, Craiova), *Predoescu I. Marin* (lic. București, Craiova), *Savovici Florentin* (lic. Milit, Tg.-Mureș), *Șerban Teodor, Ștefănescu Anibal* (București), *Șova-Grigoreni C. I.* (student, București), *Tica P. Marin* (Șc. Milit. de Artilerie) și *Trică Ioan* (Constanța).

Observare: D-nii *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad) și *Motoc D. Mircea* (Oltenița), au rezolvat sistemul mai general:

$$\begin{cases} (x^n-y^n)(x^n y^n-1)=A\,x^n y^n \\ (x^{2n}-y^{2n})(x^{2n}y^{2n}-1)=k\,A\,x^{2n}y^{2n}, \end{cases}$$

urmând aceiași metodă ca mai sus.

1069. — *Să se stabilească identitățile:*

$$(1+2\cos t+2\cos 2t)^2=5+2(\cos 4t+2\cos 3t+3\cos 2t+4\cos t)$$

$$(1+2\cos t+2\cos 2t+2\cos 3t)^2=7+2(\cos 6t+2\cos 5t+3\cos 4t+4\cos 3t+5\cos 2t+6\cos t)$$

Să se generalizeze.

V. ALACI

Prima soluție. Dezvoltând primii membrii a-i identităților date avem:

$$(1+2\cos t+2\cos 2t)^2=1+4\cos^2 t+4\cos^2 2t+4\cos t+4\cos 2t+8\cos t\cos 2t$$

$$(1+2\cos t+2\cos 2t+2\cos 3t)^2=1+4\cos^2 t+4\cos^2 2t+4\cos^2 3t+4\cos t+4\cos 2t+4\cos 3t+8\cos t\cos 2t+8\cos t\cos 3t+8\cos 2t\cos 3t$$

Ținând seamă de relațiile cunoscute:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &2\cos^2 at=\cos 2at+1\\ &2\cos at\cos bt=\cos(a+b)t+\cos(a-b)t, \end{aligned}$$

relațiile de mai sus devin:

$$(1+2\cos t+2\cos 2t)^2=1+2\cos 2t+2+2\cos 4t+2+4\cos t+4\cos 2t+4\cos 3t+4\cos t=5+2(\cos 4t+2\cos 3t+3\cos 2t+4\cos t)$$

$$(1+2\cos t+2\cos 2t+2\cos 3t)^2=1+2\cos 2t+2+2\cos 4t+2+2\cos 6t+2+4\cos t+4\cos 2t+4\cos 3t+4\cos 3t+4\cos t+4\cos 4t+4\cos 2t+4\cos 5t+4\cos t=7+2(\cos 6t+2\cos 5t+3\cos 4t+4\cos 3t+5\cos 2t+6\cos t)$$

Astfel sunt stabilite identitățile cerute.

Generalizare. Trebuie să stabilim acum identitatea mai generală:

$$(1+2\cos t+2\cos 2t+\ldots+2\cos nt)^2=2n+1+2[\cos 2nt+2\cos(2n-1)t+3\cos(2n-2)t+\ldots+(2n-1)\cos 2t+2n\cos t]$$

Dezvoltând primul membru, ținând seamă de relațiile cunoscute (1), putem scri succesiv:

$$(1+2\cos t+2\cos 2t+\ldots+2\cos nt)^2=1+4\sum_{k=1}^{n}\cos^2 kt+4\sum_{k=1}^{n}\cos kt+8\sum_{k=2}^{n}\cos t\cos kt+8\sum_{k=3}^{n}\cos 2t\cos kt+\ldots+8\cos(n-1)t\cos nt=$$

$$1+2\sum_{k=1}^{n}(\cos 2kt+1)+4\sum_{k=1}^{n}\cos kt+4\sum_{k=2}^{n}[\cos(k+1)t+\cos(k-1)t]+4\sum_{k=3}^{n}[\cos(k+2)t+\cos(k-2)t]+\ldots+4[\cos(2n-1)t+\cos t]=2n+1+2[\cos 2nt+2\cos(2n-1)t+3\cos(2n-2)t+\ldots$$

$$+(2n-1)\cos 2t+2n\cos t]$$

Avem astfel identitatea generală stabilită.

Au dat soluții analoage, fără a stabili identitatea generalizată, d-nii: *Dan T. Traian*, *Drăgan Ion* (R.-Vâlcea), *Fofiu Cornel* (bacalaureat, Beiuș), *Nenciulescu Hariton* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Savovici Florentin* (lic. Milit, Tg.-Mureș), *Tica P. Morin* (Șc. Milit., de Artilerie) și *Trică Ioan* (Constanța).

Soluția 2-a, generalizare. Folosim metoda din articolul: *„O clasă de identități deduse prin dezvoltări în serii"*, din R. M. T., anul XI, No. 11.

Considerăm dezvoltarea:

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{2n})^2=1+2x+3x^2+$$
$$\ldots+2x^{2n-1}+(2n+1)x^{2n}+2nx^{2n+1}+$$
$$\ldots+3x^{4n-2}+2x^{4n-1}+x^{4n}$$

Împărțind ambii membrii prin x^{2n} și grupând termenii în mod convenabil, avem:

$$[1+(x+x^{-1})+(x^2+x^{-2})+\ldots+(x^n+x^{-n})]^2=$$
$$2n+1+(x^{2n}+x^{-2n})+2(x^{2n-1}+x^{-(2n-1)})+$$
$$3(x^{2n-2}+x^{-(2n-2)})+\ldots+(2n-1)(x^2+$$
$$x^{-2})+2n(x+x^{-1})$$

Dacă în această identitate, punem:

$$x=e^{it},\quad (i=\sqrt{-1})$$

și ținem seamă de formula lui *Euler:*

$$x^{\alpha}+x^{-\alpha}=e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t}=2\cos\alpha t,$$

avem:

$$(1+2\cos t+2\cos 2t+\ldots+2\cos nt)^2=2n+$$
$$1+2[\cos 2nt+2\cos(2n-1)t+3\cos(2n-2)t$$
$$+\ldots+(2n-1)\cos 2t+2n\cos t],$$

Am obținut astfel identitatea generală cerută.

Pentru $n=2$ și $n=3$, obținem:

$$(1+2\cos t+2\cos 2t)^2=5+2(\cos 4t+$$
$$2\cos 3t+3\cos 2t+4\cos t)$$
$$(1+2\cos t+2\cos 2t+2\cos 3t)^2=7+2(\cos 6t+$$
$$2\cos 5t+3\cos 4t+4\cos 3t+5\cos 2t+6\cos t),$$

care sunt identitățile din enunț.

Au dat soluții analoage, d-nii: *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Mihăileanu N. N.* (Constanța), *Motoc D. Mircea* (Oltenița), *Predoescu I. M.* (lic Buzești, Craiova) și *Zamfir D.* (Șc. Navală).

Soluția 3-a, dată de d-l *Mihăileanu N. N.* (Constanța).

In articolul: *„Sume trigonometrice transformate în produse"* din R. M. T., Anul VII, No. 9 sunt stabilite identitățile (9) și (27), anume:

$$1+2\cos t+2\cos 2t+\ldots+2\cos nt=$$
$$2^n\prod_{k=1}^{n}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$
$$2n+1+2[\cos 2nt+2\cos(2n-1)t$$
$$+3\cos(2n-2)t+\ldots+(2n-1)\cos 2t$$
$$+2n\cos t]=$$
$$2^{2n}\prod_{k=1}^{n}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)^2$$

Ridicând prima identitate la patrat și comparând'o cu a doua, observăm că au membrii al 2-lea egali, deci rezultă:

$$(1+2\cos t+2\cos 2t+\ldots+2\cos nt)^2=2n+$$
$$1+2[\cos 2nt+2\cos(2n-1)t+3\cos(2n-2)t$$
$$+\ldots+(2n-1)\cos 2t+2n\cos t],$$

care este tocmai identitatea generală cerută.

Dacă în această identitate, luăm $n=2$ și $n=3$, obținem identitățile din enunț.

1070. [1]) *Să se arate că dacă avem:*

$$\sin x+\cos x=a$$
$$\sin^5 x+\cos^5 x=b,$$

atunci rezultă:

$$\frac{4(a^5-b)}{5a(a^4-1)}=1$$

ION MARGINEANU

Vom elimina pe x din relațiile date.

Ridicând prima relație la puterea 5 și scăzând pe a 2-a, avem:

(1) $$a^5-b=5\sin x\cos x(\sin^3 x+\cos^3 x)+$$
$$10\sin^2 x\cos^2 x(\sin x+\cos x)$$

Ridicând la patrat relația:

(2) $$\sin x+\cos x=a,$$

deducem:

[1]) Enunț rectificat.

(3) $$\sin x \cos x = \frac{a^2 - 1}{2}$$

Ridicând la cub relaţia (2), deducem:

(4) $$\sin^3 x + \cos^3 x = a^3 - 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x) = a^3 - 3a \frac{a^2 - 1}{2} = \frac{3a - a^3}{2}$$

In virtutea relaţiilor (2), (3) şi (4), relaţia (1) devine:

$$a^5 - b = 5 \frac{a^2 - 1}{2} \cdot \frac{3a - a^3}{2} + 10a \frac{(a^2 - 1)^2}{4} =$$

$$\frac{5a(a^2 - 1)(3 - a^2 + 2a^2 - 2)}{4} = \frac{5a(a^4 - 1)}{4}$$

Impărţind ambii membrii cu expesia din membrul al 2-lea, avem:

$$\frac{4(a^5 - b)}{5a(a^4 - 1)} = 1,$$

adică tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-ra *Roşca Veronica* (lic. Internat, Craiova) şi de d-nii: *Dan T. Traian*, *Fofiu Cornel* (lic. Beiuş), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Savovici Florentin* (lic. Milit., Tg,-Mureş), *Tica P. Marin* (Şc. Milit, de Artilerie) şi *Trică S. Ioan* (Constanţa).

PROBLEME PROPUSE

1129. — Trouver un cube parfait de neuf ciffres sachant que le nombre formé par les trois chiffres à droite égale la somme des deux nombres formés par les deux tranches de trois chiffres à gauches.

V. THÉBAULT

1130. — Să se demonstreze că expresia:

$$27^{2p+1} + 9^{p+1} + 3^{4p+3} + 1,$$

se divide prin 64, oricare ar fi p.

CEZAR IVANESCU

1131. — Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{a(1-b) - xy}{xy} \\ \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{b(1-c) - yz}{yz} \\ \frac{c}{z} + \frac{a}{x} = \frac{c(1-c) - yz}{yz} \end{cases}$$

ION MARGINEANU

1132. — Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^5 + x^3 y^2 + x^2 y^3 + y^5 = 455 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

1133. — Fie A B C un triunghiu echilateral înscris într'un cerc, iar α, β, γ punctele în care o transversală tae laturile B C, C A, A B respectiv. Dreapta A α tae cercul a doua oară în α_1; dreptele B β, C γ se tae în D, iar dreapta A D tae din nou cercul în D_1. Să se arate că tangentele la cerc în punctele α_1, D_1 se tae într'un punct M pe latura B C şi că dreapta $\alpha_1 D_1$ împreună cu analoagele ei sunt concurente.

CEZAR COSNITA

1134. — Unind punctele M şi N de pe cercul O cu alte patru puncte fixe de pe cerc, A, B, C, D, obţinem fascicolele (M . A B C D) şi (N . A B C D). Prin A ducem o coardă care tae razele primului fascicol în β, γ, δ; o altă coardă dusă tot prin A, tae razele fascicolului al doilea în β', γ', δ'. Să se arate că dreptele $\beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$ sunt concurente.

MARIUS MARGULIUS

1135. — Să se rezolve ecuaţia:

$$9 + 2 \sum_{k=1}^{8} k \cos(9 - k)x = 0$$

V. ALACI

1136. — I_a, I_b, I_c fiind porţiunile de înălţimi cuprinse respectiv între vârfurile şi ortocentru unui triunghiu, să se stabilească identitatea:

$$\frac{I_a^n + I_b^n + I_c^n}{2^n R^n} = \cos^n A + \cos^n B + \cos^n C,$$

celelalte notaţii fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

SLT. MARIN P. T CA

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicaţiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele şi corespondenţa se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole şi note de la Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos şi *J. Tschlek*, Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann*, La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* şi *E. Natale*, Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez*, Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* şi *E. T. Bell*, Pasadena (California), *M. Krawtchouk* şi *N. Kryloff*, Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera*, S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W Lewitzky*, Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler*. Washington (Statele Unite), *J. Shohat*, Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville*, Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault*, Le Mans (Francia), *O. Szász*, Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti*, Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toţi aceî corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecţia R. M. T., anul IX, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

De asemenea se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

şi se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Şcoala Politechnică din Timişoara.

ANUL XII. 15 OCTOMBRIE 1932 NO. 8.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 CAPITAN GH NICULESCU ASUPRA TRIUNGHIURILOR DE LATURI INVERSE

2. NOTE MATEMATICE: 18, 19 20, 21

3. BIBLIOGRAFIE

4. PROBLEME REZOLVATE: 1071, 1072, 1073 1074 1075, 1078, 1080, 1082, 1086

5. PROBLEME PROPUSE: 1137–1144

6. INFORMATIUNI

TIMISOARA

Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Avem plăcerea a anunța că începând de la 15 Octomvrie 1932, mai face parte dintre membrii „REVISTEI MATEMATICI DIN TIMIȘOARA“ și D-l Vasiliu-Leoben Gh., inginer-geodet, str. Eminescu 22, București, fost corespondent distins al „REVISTEI“.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** — profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XII — NO. 8. TIMISOARA, 15 OCTOMBRIE 1932

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

ASUPRA TRIUNGHIURILOR DE LATURI INVERSE

de CAPITAN CH. NICULESCU

Dându-se un triunghiu de laturi $a>b>c$, am numit *triunghiu de laturi înverse,* triunghiul care are drept laturi pe $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$. Acest din urmă triunghiu nu se poate construi decât atunci când între laturile a, b, c ale triunghiului inițial există relația:

(1) $\qquad c(a+b)>ab \qquad (a>b>c)$

condițiune ce a fost stabilită cu ocazia rezolvării problemei 3907, propusă de subsemnatul în „G-M", XXXVII, pag. 146.

Se observă ușor că triunghiurile cu laturile geometric progresive ($b^2=ac$), pot da naștere totdeauna la triunghiuri de laturi înverse. Intr'adevăr, laturile acestor triunghiuri verifică inegalitatea de condiție (1) și pentru a arăta acest lucru este suficient să desfacem paranteza acestei înegalități:

$$ca+cb>ab$$

și să înlocuim valoarea lui ca, obținând:

$$b^2+cb>ab$$

$$b+c>a$$

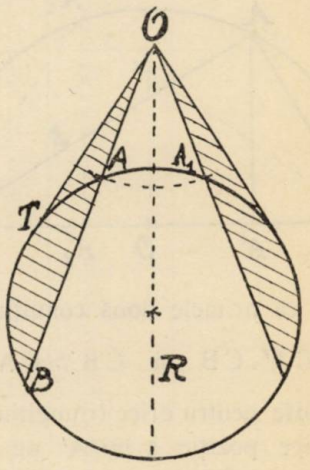
inegalitate adevărată, căci triunghiul de laturi $a>b>c$ este dat.

In prezentul articol [1]) îmi propun să arăt cum putem construi triunghiurile geometric progresive și ca atare cum putem construi triunghiurile de laturi înverse corespunzătoare. Calea cea mai simplă este de a da valori lui a, b și c de natură a satisface în același timp la condițiile:

$$a>b>c \quad ; \quad a<b+c \quad ; \quad b^2=ac$$

Ca exemplu, vedem că $a=9$; $b=6$; $c=4$ este una din multiplele soluțiuni. Dar acest fel de a proceda este prielnic în special pentru numere întregi. In cele de mai jos voi rezolva în mod grafic problema.

I. Să considerăm figura de mai jos.



Avem totdeauna:

$$\overline{OT}^2=OA.OB \quad \text{și} \quad OB>OT>OA$$

și mai trebuie îndeplinită încă condițiunea:

$$OB<OT+OA \quad \text{sau} \quad AB<OT$$

dar $(AB)_{max.}=2R$. Dacă vom lua deci $OT>2R$, problema este totdeauna posibilă și cu:

$$OB=a \quad ; \quad OT=b \quad ; \quad OA=c$$

putem construi triunghiul geometric progresiv ($b^2=ac$) și deci și triunghiul de laturi $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$.

Dacă însă $OT<2R$, nu putem duce oricum secanta OAB. La limită ($OT=AB$) vom scrie:

$$OT^2=OA(OA+AB)=\overline{OA}^2+$$

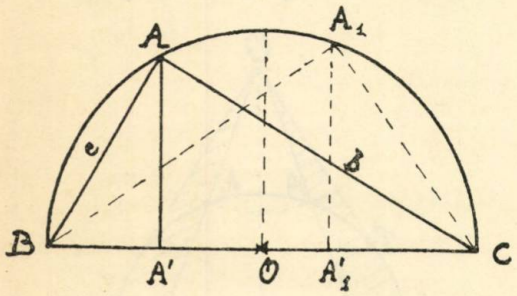
[1]) Am trimis spre publicare două articole, la „G. M.", conținând proprietăți de-ale triunghiurilor de laturi înverse.

$$OA.AB=\overline{OA}^2+OA.OT$$

$$(2)\qquad OA=OT\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Cu centrul în O şi cu raza OA astfel găsită vom tăia cercul TAB în A şi A_1. Orice secantă dusă în regiunile haşurate răspunde problemei. Pentru ca cercul de rază OA şi cercul de rază R să se taie, trebuie ca $OT<2R$, condiţiune ce o găsim scriind că distanţa centrelor trebuie să fie mai mică ca suma razelor. Ori studiem chiar acest caz ($OT<2R$) şi conchidem că cercurile se vor tăia totdeauna, adică vom avea totdeauna numai soluţiile din zonele haşurate.

II. Să considerăm triunghiul dreptunghic de mai jos:



Observăm că primele două condiţiuni:

$$\overline{CA}^2=CA'.CB \quad \text{şi} \quad CB>CA>CA'$$

sunt îndeplinite pentru orice triunghiu dreptunghic şi pentru orice poziţie a lui A' pe ipotenuza *a*.

Să verificăm şi condiţiunea ultimă:

$$CB<CA+CA'$$

care se reduce, observând figura, la:

$$A'B<CA$$

Dacă A' este situat între O şi B, această ultimă înegalitate este totdeauna verificată şi ca atare în această regiune avem o infinitate de soluţiuni ale triunghiurilor $b^2=ac$.

Dacă însă A' se va găsi între O şi C, vom avea încă soluţiuni până într'un punct A'_1, pentru care:

$$A'_1B=CA_1$$

egalitate ce se mai poate scrie:

$$c\sin C=b$$

şi care asociată cu:

$$\frac{c}{b}=\operatorname{tg}C$$

ne conduce la:

$$\operatorname{tg}C\sin C=1 \quad \text{sau} \quad \sin^2 C=\cos C$$

care ne dă:

$$(3)\qquad \cos C=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

egalitate ce ne dă valoarea unghiului $A_1CA'_1$ limită peste care nu trebuie să trecem pentru a avea soluţiuni.

Remarcă. Dacă în egalitatea (2) facem $OT=1$, atunci comparând cu (3) obţinem:

$$OA=\cos C=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

cu alte cuvinte:

1°. OA, este latura decagonului înscris în cercul de rază OT, iar dacă $OT=1$, atunci cercul este cel trigonometric.

2°. Privind figura II-a, avem $OA'_1=\cos C$ şi deci OA'_1 este de asemenea latura decagonului înscris în cercul trigonometric, iar ca consecinţă: $OA=OA'_1$.

III. Să considerăm tot figura II-a. Avem:

$$\overline{AA'}^2=A'B.A'C$$

şi în cazul când A' se găseşte între O şi B vom avea şi

$$A'C>AA'>A'B$$

Şi aci trebuie să verificăm că:

$$A'C<AA'+A'B$$

Pentru găsirea limitei posibile vom egala:

$$A'C=AA'+A'B$$

$$***\qquad A'C=\pm\sqrt{A'B.A'C}+A'B$$

care se reduce la:

$$(4)\qquad \overline{A'C}^2+\overline{A'B}^2-3A'B.A'C=0$$

pe care rezolvând'o în raport cu AC:

$$A'C=A'B\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

şi vom opri numai raportul:

$$\frac{A'C}{A'B} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

căci numai acesta plasează pe A' între O şi B.

Dacă acum reluăm ecuaţia (4) pe care s'o scriem:

$$(A'C+A'B)^2 - 2A'C \cdot A'B - 3A'B \cdot A'C = 0$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad a^2 - 5A'C \cdot A'B = a^2 - 5h^2 = 0$$

h, fiind înălţimea dusă din vârful A al triunghiului dreptunghic, atunci punctul A', ce limitează zona în care se rezolvă triunghiul $b^2 = ac$, se plasează acolo unde avem:

$$h = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Concluziuni:

1°. Construcţiile de sub (I), II şi III, rezolvă cu uşurinţă triunghiurile geometric progresive şi dau deci posibilitatea de a construi ca consecinţă şi cu aceiaşi uşurinţă triunghiurile de laturi înverse.

2°. Construcţia I, este cea mai uşuoară şi cu regiunea cea mai mare, în cazul când $OT > 2R$. Construcţia II are o regiune mai mare ca construcţia III-a.

3°. Construcţiile II şi III sunt de preferat, când în afară de condiţiunea generală $b^2 = ac$ se mai pune una relativă între laturile a şi c, căci în asemenea cazuri, prin natura construcţiilor se pot găsi relaţiuni între a şi c.

NOTE MATEMATICE

18. — *Petru Sergescu, Gândirea matematică.* [1] Apărută în 1928 cartea Dlui Prof. *P. Sergescu* e singura lucrare de literatură matematică în penuria ce caracterizează piaţa îndigenă a literaturii ştiinţifice în genere. Deaceea, n'o putem situa sau îngloba în concertul unor manifestaţii, anterioare sau posterioare ei, din câmpul unor preocupări analoage, pentru simplul motiv că acestea n'au existat. Totuş, aşa cum este concepută şi scrisă această carte, ea se integrează minunat de bine în atmosfera generală pur ştiinţifică, ce emană din întreaga activitate din ultimile două decenii, a matematicianilor români. Se înjghebează şi tinde cu timpul spre o închegare trainică, o şcoală matematică românească. Dl *Petru Sergescu* e unul din reprezentanţii săi de frunte. In afară de aportul pur ştiinţific, D-sa aduce matematicilor române nepreţuitul serviciu al unei propagande, însufleţită şi constantă, dincolo de fruntariile ţării. Aci, pentru acei dintre noi, cari frecventează domeniul matematicilor sau pentru publicul profan, Dl *Sergescu* a scris o carte, — de orientare şi sistematizare pentru unii, de iniţiare şi edificare pentru celălalt.

Sunt cu totul 7 capitole de sine stătătoare. Ultimile două: *Matematica şi ştiinţa, Matematica şi viaţa,* constitue partea cea mai elementară şi uşor accesibilă şi acelora cu o minimă pregătire matematică. Sunt, minunate pledoarii şi justificări pe marginea prestigiului matematicilor, făcute cu o caracteristică obiectivitate. Primul capitol al cărţii, *Evoluţia gândirii matematice,* fără să fie documentar, informează precis şi sistematic în succesiunea diferitelor etape de desvoltare a matematicilor. Gândirea matematică a evoluat în timp, nu izolat, ci mână'n mână cu gândirea în general, cu filosofia. Observaţia aceasta e de mare importanţă pentru acei ce vor să studieze sau să scrie o istorie a matematicilor, — şi atât pe cât i-au permis planul general al lucrării şi spaţiul limitat al capitolului, Dl *Sergescu* i s'a conformat. Poate că singura lipsă ce se simte este aceea a gândirii şi frământărilor savanţilor evului mediu, despre cari D-sa pomeneşte în capitole diferite, insuficient însă, — mai ales că această epocă este pe nedrept ignorată şi savanţii timpului disprețuiţi de incompetinţele contimporane, cari ştiu numai să râdă frumos când se pomeneşte de dilema măgarului lui *Buridan.*

Cât priveşte împărţirea în epoce distincte, autorul adoptă pe aceea a lui *P. Boutroux,* care tocmai pentrucă coincide cu marile epoci ale evoluţiei gândirii în general, e cea nimerită. Gândirea matematică a evoluat, situându-se în timp după caracteristice esenţiale, paralel cu marile manifestaţii de cultură: epoca antică şi scolastică; renaşterea ştiinţifică şi până la începutul veacului XIX-lea; epoca modernă (sau, cu un termen întrebuinţat în istorie şi consacrat, — contemporană) care ţine de pela 1800 până în zilele noastre. (pag. 7.)

[1] N. R. Lucrare premiată de Academia Română.

Trecem peste capitolul, interesant însă prea concis, referitor la *Creaţia matematică.*

In: *Metodele gândirii matematice,* autorul încearcă să precizeze mai întâi caracterul gândirii matematice, afirmând că „nu avem deaface nici cu o ştiinţă pur deductivă, nici cu o disciplină experimentală, ci că întâlnim o îmbinare fericită a celor două procedee fundamentale ale cugetării". Procesul general al gândirii în matematică este exact schematismul dinamic al lui *Bergson.* „In matematică, acest schematism se înfăţişează sub două aspecte deosebite: 1. metoda aproximărilor succesive şi 2. inducţia complectă. In amândouă se găsesc şi elemente de judecată inductivă şi elemente de judecată deductivă". Dl *Sergescu* evidenţiază rolul generalizării şi analogiei — şi pomeneşte principiile generale ale cugetării cari duc la metode ca aceea a solidificarii, variaţională, statistică.

Partea cea mai importantă a cărţii o constitue cele două capitole despre cari n'am pomenit până acum nimic: *Făpturile (noţiunile) matematicei* şi *Domeniul matematicei.* Făpturile matematice, fundamentale, sunt noţiunile de: mărime, formă şi funcţiune. Dl *P. Sergescu* le analizează pe fiecare în parte, arătând care a fost în decursul timpurilor evoluţia acestor noţiuni. D-sa insistă în mai multe rânduri asupra modului cum matematica îşi crează noţiunile de cari are nevoie, pentru a scăpa de greutăţile ce vecinic se ivesc în cale-i. Sunt pilde minunate, crearea numereler iraţionale şi a celor imaginare. Felul în care numerele complexe au fost create, a determinat pe matematiciani să generalizeze procedeul, imaginând numere, de pildă, cu patru unităţi deosebîte: $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (quaterniori), etc. E un exemplu, dintre atâtea altele, care face să iasă în evidenţă caracterul matematicilor, deosebit de al celorlalte ştiinţe, cari îşi crează singure pentru nevoi exprese noţiuni ce nu pot fi împrumutate de altundeva. Cercetând evoluţia făpturilor matematice, D-l *Sergescu* pomeneşte de: *corpurile algebrice de numere* (ale lui *Galois*); *numere transcedente* (ex. $\pi = 3{,}1415...$) cari nu pot fi rădăcini ale nici unei ecuaţiuni algebrice cu coeficienţi raţionali; *numere ideale,* etc., — alături de mărimile variabile, cantităţi în continuă *devenire: infinitul mic* şi *infinitul mare.*

Două pagini ocupă analiza noţiunii de formă, cu care se ocupă geometria, stabilind numai procesul de întrepătrundere a geometriei cu algebra, realizată de *Descartes;* despre evoluţia noţiunii de spaţiu şi a noţiunii de dreaptă autorul vorbeşte, deşi ar fi fost mai nimerit în capitolul făpturilor matematice, în celălalt capitol, al domeniului matematicilor, cu ocazia chestiunii scindării geometriei în: euclidiană şi neeuclidiană. Foarte interesantă şi bine expusă e partea relativă la noţiunea de funcţiune; sunt amintite: funcţiunile continue, periodice (cu una şi cu două perioade şi cele fuchsiane sau automorfe datorite lui *H. Poincaré);* apoi, funcţiunile analitice, algebrice şi quasi-analitice.

In capitolul intitulat: *Domeniul matematicilor,* sunt enumărate disciplinele de subdiviziune ale matematicilor, fiecare cu elementele ei caracteristice. In această expunere greutatea stă în aceea că fiecare ramură nu este izolată de rest, existând o înlănţuire complexă ce face ca un anumit capitol să poată fi, dacă e privit din puncte de vedere deosebite, dar motivate, înglobat tot atât de bine unei ramuri sau alteia. Această greutate, D-l *Sergescu* a învins-o, reuşind să ne dea o bună sinteză a complexului de elemente ce formează ştiinţa matematicilor.

Scopul urmărit de D-l Prof. *Petru Sergescu,* în ceeace-l priveşte pe D-sa, a fost atins; — *Gândirea matematică* este o carte de valoare; dar aceasta nu este deajuns: mai este nevoie să fie şi citită! Şi ca orice carte de literatură ştiinţifică, numai a doua lectură reuşeşte să cristalizeze în spiritul cetitorului, materialul informativ, ideile şi intenţiunile autorului.

N. O. ZAHARIA

19. — *Despre semnele + şi —.*

Revenind asupra notei mele publicate în „Revista Matematică din Timişoara", anul XI, No. 4, vreau să dau unele amănunte despre întroducerea semnelor întrebuinţate în Matematică. Voi întrebuinţa pentru acest scop cărţile lui *D. E. Smith* (History of Mathematics, vol. II) şi *Florian Cajory* (History of mathematical notations, vol. I). Incep cu semnele de operaţiuni, mărginindu-mă, deocamdată la primele două: adunarea şi scăderea. Primele semne de operaţiuni ne parvin din manuscri-

sele egiptiene. Astfel în Papirus Ahmes (circa 1550 în. de Chr.) adunarea şi scăderea sunt exprimate: prima printr'o pereche de picioare care merg înainte, a 2-a printr'o pereche de picioare care merg înapoi (socotind „înainte" şi „înapoi" în sensul în care se citea textul). Matematicianul grec *Diofant* reprezenta adunarea ca o simplă suprapunere, iar pentru scădere e posibil să fi reprezentat un simbol special, un fel de ψ („psi") răsturnat; dar faptul nu e sigur, deoarece primul manuscris păstrat al cărţii lui *Diofant* datează abia din secolul al 13-lea. Matematicienii din India n'au avut semne speciale pentru operaţiuni; numai în aşa numitul manuscris „Bakshali" se întrebuinţează o cruce, dar ea înseamnă numai că e vorba de o cantitate negativă. *Bhaskara* (circa 1150 d. Chr.) închide scăzătorul într'un cerc, sau pune un mic cerc sau un punct deasupra lui: (6), $\overset{o}{6}$, $\dot{6}$. In Europa primele semne întrebuinţate pentru adunare au fost p, P, sau, mai ales, $\overline{p}$; toate aceste semne au provenit, probabil, din prescurtarea cuvântului „plus". Se întrebuinţa, de altfel, însuşi acest cuvânt, ca şi cuvântul „minus"; cuvântul „minus" apare cel dintâi, de ex., în operele lui *Fibonacci* (1202), pe când „plus" nu se găseşte decât în a 2-a jumătate a secolului al 15-lea. Pentru scădere avem $\overline{m}$, prescurtarea lui „minus". E curios că diferite popoare arată predilecţie pentru diferite semne; astfel, Francezii şi Italienii au întrebuinţat până la sfârşitul secolului al 16-lea prescurtările $\overline{p}$ şi $\overline{m}$; mari autori italieni scriau „piu" şi „men", iar francezii „plus" şi „moins". In schimb, matematicienii germani preferă semnele + şi — care apar, pentru a indica adunarea şi scăderea, către sfârşitul secolului al 15-lea. Este foarte probabil că semnul + derivă dintr'o scriere prescurtată a cuvântului „et"; într'un vechi manuscris german (1456), acest cuvânt e scris astfel încât nu se deosebeşte aproape deloc de semnul +. Originea semnului — nu e tot aşa de clară. Se poate ca el să fi provenit din obiceiul unor scribi care l'au întrebuinţat ca echivalentul lui m, scriind „Suma" în loc de „Summa"; tot astfel se scria $\overline{\text{X}}$ în loc de X *mille* (10000), liniuţa înlocuind m *(mille)*. Semnele + şi — tipărite au apărut pentru prima oară în aritmetica lui *Johann Widman*, „Behēde und hubsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft" (Leipzig, 1489), unde autorul zice: „Was — ist, das ist minus und das + das ist mer". Deşi unii autori au crezut că + şi — nu reprezintă în cartea lui *Widman* decât nişte simboale pentru „exces" sau „lipsă", pare a fi stabilit, în urma cercetărilor lui *Cajory*, că aceste semne au fost întrebuinţate pentru a indica adunarea şi scăderea. Primul care a întrebuinţat semnele + şi — într'o expresiune algebrică, a fost matematicianul olandez *Van der Hoeche* (1514), care scrie, de ex., $\text{R}\!\!\not/\, \frac{3}{4} - \text{R}\!\!\not/\, \frac{3}{5}$ (în loc de $\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{3}{5}}$) şi $\text{R}\!\!\not/\, 3+5$ (în loc de $\sqrt{3+5}$). Este curios că aceste semne au trecut în curând în domeniul Algebrei, încât abia în secolul al 19-lea întrebuinţarea lor în cărţile de Aritmetică a devenit generală. Unii autori au adoptat forme particulare pentru semnul +, făcând, de ex., linia orizontală mai lungă decât cea verticală ($\dashv\vdash$), sau scriindu-l ca ✠, sau ca $\bar{+}$ etc. Cât despre alte ţări, semnele + şi — apar în Anglia în anul 1557 (cărţile lui *Robert Recorde*) şi în Franţa în anul 1591 (cărţile lui *Vieta*). Cu timpul, aceste semne s'au răspândit peste tot.

PETRE V. CAZANACLI

20. — *Asupra problemei 940.* Imi propun de-a afla pe altă cale decât cea îndicată la pagina 44, anul XI: R. M. T. soluţiile sistemului luat mai general:

$$x^n + y^n + z^n = a$$

$$x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} + m\,x^n y^n z^n = b$$

$$x^n y^n z^n (x^{3n} + y^{3n} + z^{3n}) = c$$

Consider că x^n, y^n şi z^n sunt rădăcinele ecuaţiei:

$$t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3 = 0 \tag{1}$$

După formulele lui *Newton* avem:

$$S_1 + a_1 = 0 \tag{2}$$

$$S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0 \tag{3}$$

$$S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3a_3 = 0 \tag{4}$$

unde:

$$S_1 = x^n + y^n + z^n$$

$$S_2 = x^{2n} + y^{2n} + x^{2n}$$

$$S_3 = x^{3n} + y^{3n} + z^{3n}$$

Ecuaţiile din enunţ devin şi ele:

(5) $$S_1 = a$$

(6) $$S_3 - m a_3 = b$$

(7) $$- S_3 a_3 = c$$

Eliminând pe S_3 între (6) şi (7) avem:

$$m a_3^2 + b a_3 + c = 0$$

de unde:

$$a_3 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mc}}{2m}$$

deci:

$$S_3 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4mc}}{2}$$

Punând valorile lui S_1, S_3 şi a_3 în (2), (3) şi (4) avem:

$$a_1 = -a$$

$$S_2 = a^3 - 2a_2$$

$$\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4mc}}{2} - a^3 + 2a a_2 + a a_2 +$$

$$3 \cdot \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mc}}{2m} = 0$$

De unde:

$$a_2 = \frac{2a^3 m + b(3-m) \mp (m+3)\sqrt{b^2 - 4mc}}{6am}$$

Cunoscând pe a_1, a_2, şi a_3 ecuaţia (1) ne va da:

$$x = \sqrt[n]{f(a,b,c,m)}\ ,\quad y = \sqrt[n]{\varphi(a,b,c,m)}\ ,$$

$$z = \sqrt{\varphi(a,b,c,m)}$$

Făcând:

$$a = 10, \quad b = 100, \quad c = 4800, \quad m = -2$$

atunci:

$$a_1 = -10 \qquad a_3' = -30 \qquad a_2' = 31$$

$$a_3'' = +80 \qquad a_2'' = \frac{82}{3}$$

Punând pe rând aceste valori în (1) găsim:

$$t^3 - 10t^2 + 31t - 30 = 0$$

Care ne dă soluţiile

$$t_1 = 2, \quad t_2 = 3, \quad t_3 = 5$$

valori care dau naştere la *6 soluţii*.

Deasemeni avem:

$$3t^2 - 30t^3 + 82t + 240 = 0$$

găsim:

$$t_1 = -1{,}7 \qquad t_2 = \frac{-11{,}7 + \sqrt{-53{,}11}}{2}$$

$$t_3 = \frac{-11{,}7 - \sqrt{53{,}11}}{2}$$

care dau şi ele naştere la 6 sisteme de soluţii.

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

21. — *Asupra notei 15.*

In prima coloană de la pagina 76 la această notă s'au făcut unele omisiuni. Din această cauză rezultatele din tablourile de pe coloana a doua, care sunt exacte, nu au în coloana întâi toate egalităţile din care derivă. De aceia egalităţile care rezultă din enunţ şi cele ale şirului (1) trebuesc complectate cu următoarele:

$$b \times c = a^3 \times c^3; \quad a \times c = a^3 \times b^3; \quad a \times c = b^3 \times c^3$$

şi

$$b = a^3 \times c^2; \qquad c = a^2 \times b^3; \qquad a = b^3 \times c^2$$

COL. GH BUICLIU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVIII, No. 1, Septemvrie 1932. Rezumatele articolelor publicate în *„Gazeta Matematică"* de *G. Ţiţeica*. Concursul *„Gazetei Matematice"*, de *Al. Bunescu, Col. Gh. I. Liteanu* şi *C. Orăşanu*. Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor *„Gazetei Matematice"*, de *Ioan Busilă* şi *Gh. Iliescu*.

2. *Boletin Matematico*, anul III, No. 6, August 1932, *Buenos Aires*. Sume, diferenţe şi produse a numerelor, simultan.

PROBLEME REZOLVATE

1071. — *Să se găsească patratul perfect de trei cifre ştiind că suma cifrelor lui care este patrat perfect, este jumătatea rădăcinei patratului cerut.*

MIRCEA CONSTANTINESCU

Fie abc patratul cerut. Conform enunţului, $a+b+c$ fiind patrat perfect şi evident cuprins între 1 şi 27 inclusiv, poate fi 4, 9, sau 16.

Cum patratul $a+b+c$ este jumătatea rădăcinei patratului lui abc, nu poate fi de cât 9, de oarece rădăcina unui patrat de trei cifre este cuprinsă între 10 şi 31 inclusiv.

Rădăcina patrată a lui abc este deci 18, iar patratul cerut este:

$$324 = 182$$

Soluţii date de d-nii: *Aniţescu N. Nicolae* (student, Bucureşti), *Boerescu P. George* (lic. Oltenita), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Constantin Petre* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Dan T. Traian* (lic. Beiuş), *Dini Al. Ioan* (Şc. Milit. de Artilerie), *Fofiu Cornel* (lic. Beiuş), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic., Roman), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Mehedinţi D. D-tru* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Nenciulescu Hariton* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Pănoiu Emanoil* (lic. Carol, Craiova) *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Popa Gh. Ioan* (Bucureşti), *Popescu N. Petre* (student, Bucureşti), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Predoescu I. M.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Savovici Florentin* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Şova-Grigoreni C. I.*, *Stoica D.* (Sub.-Lt.), *Stoicescu I. Ernest* (Şc. Milit. de Geniu), *Tica P. Marin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Trică S. Ioan* (Constanţa), *Zamfir O.* (Şc. Navală) şi *Zane D. Nicolae*.

1072. — *Să se găsească două numere* A *şi* B *cunoscând că cel mai mic multiplu comun a lor este 168 şi că*

$$\frac{A^3+B^3}{AB(A+B)} = \frac{13}{12}$$

CEZAR IVANESCU

Relaţia din enunţ simplificată prin $A+B$, devine:

$$\frac{A^2-AB+B^2}{AB} = \frac{13}{12}$$

Dacă înmulţim numitorii cu 3 şi îi adunăm la numărători, obţinem:

$$\frac{(A+B)^2}{AB} = \frac{49}{12}$$

Dacă aci, înlocuim numitorii prin diferenţa dintre numărători şi împătritul numitorilor, obţinem:

$$\frac{(A+B)^2}{(A-B)^2} = \frac{49}{1},$$

de unde deducem:

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{7}{1}$$

Aplicând iarăşi o proprietate cunoscută a proporţiilor, anume înlocuind numărătorii prin suma dintre numărători şi numitori iar numitorii prin diferenţa intre numărători şi numitori, avem:

$$\frac{A}{B} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},$$

deci:

(1) $$3A = 4B$$

De altă parte 168 fiind $c.m.m.c.m.$ al numerelor A şi B, rezultă:

(2) $$168 = m.A = m_1.B$$

şi ţinând seamă de (1), deducem $m = 3$, $m_1 = 4$, astfel că:

$$168 = 3A = 4B$$

De aci rezultă:

$$A = 56\ ,\ B = 42;$$

care sunt numerile căutate.

Soluţii date de d-nii: *Aniţescu N. Nicolae* (student, Bucureşti), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru Marin* (lic. Milit., Craiova), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Dan T. Traian* (Bihor), *Fofiu Cornel* (bacalaureat, Beiuş), *Margulius Marius* (lic Spiru-Haret, Bucureşti), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Popescu N. Petre* (Bucureşti), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Şova-Grigoreni C. Ion* şi *Tica P. Marin* (Şc. Milit. de Artilerie),

1073. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\frac{y^3(x^6-1)+2xy^2(x^4y^2-1)+x^2y(x^2y^4-1)}{y^3(x^6-1)+3xy^2(x^4y^2-1)+3x^2y(x^2y^4-1)+x^3(y^6-1)} = \frac{y(x^4y^2-1)}{(x+y)(x^3y^3-1)}$$

V. ALACI

Insemnând cu E primul membru, dezvoltând şi simplificând, putem scri succesiv:

$$E = \frac{x^6y^3-y^3+2x^5y^4-2xy^2+x^4y^5-x^2y}{x^6y^3-y^3+3x^5y^4-3xy^2+3x^4y^5-3x^2y+x^3y^6-x^3} =$$

$$\frac{y[x^4y^2(x^2+2xy+y^2)-(x^2+2xy+y^2)]}{x^3y^3(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)} =$$

$$\frac{y(x+y)^2(x^4y^2-1)}{(x+y)^3(x^3y^3-1)}$$

Simplificând prin $(x+y)^2$, rezultă:

$$E=\frac{y(x^4y^2-1)}{(x+y)(x^3y^3-1)}$$

Identitatea dată este astfel stabilită.

Soluţii date de d-rele: *Fabius Dorina* (studentă, Cluj), *Hortopan Ana* (studentă, Cluj), şi de d-nii: *Acikgheozian Nubar* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Aniţescu N. Nicolae* (student, Bucureşti), *Coandă I. Virgil* (lic Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Cristali Gh.* (Şc. Milit. Aeronautică), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Dan T. Traian* (lic. Beiuş), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Dini Al. Ion* (Şc. Milit. de Artilerie), *Fofiu Cornel* (lic., Beiuş), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Gheţie Coriolan* (Beiuş), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ivănescu Cezar* (lic., Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Maşcaş Petre* (lic., Beiuş), *Nenciulescu Hariton* (lic. Miiit., Tg.-Mureş), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Nenciulescu Hariton* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Popa D. Traian* (lic., Giurgiu), *Popescu N. Petre* (Bucureşti), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Predoescu I. M.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Reghiş Pavel* (lic., Beiuş), *Savovici Florentin* (lic. Milit, Tg.-Mureş), *Şova-Grigoreni C. I.*, *Ştefănescu Anibal* (Bucureşti), *Tica P. Marin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Trică S. Ion* (Constanţa) şi *Zamfir O.* (Şc. Navală).

1074. — *Un călător pleacă pe jos din oraşul* A *spre comuna* B *aşezată la distanţa de 10 km. de* A. *Când ajunge la 2 km. de* A *îl ajunge poşta rurală care plecase din* A *spre* B. *Poşta trece înainte, ajunge în* B, *stă în* B *un sfert de oră, se întoarce spre* A, *întâlneşte călătorul la 2 km. de* B *şi ajunge în* A *cu o jumătate de oră după ce călătorul ajunge în* B.

Care este viteza călătorului şi a poştei rurale?

I. DUMITRIU-DADA

Fie x viteza călătorului şi y viteza poştei în kilometri pe oră. Călătorul face un kilometru în timpul $\frac{1}{x}$, iar poşta în timpul $\frac{1}{y}$, ore: Se observă că în timp ce călătorul parcurge 6 km., poşta străbate 10 km., zăbovind un sfert de oră în B, de unde rezultă relaţia:

$$\frac{6}{x}=\frac{10}{y}+\frac{1}{4}$$

Ţinând seamă mai departe de enunţ, observăm că în timp ce poşta parcurge 8 km., călătorul parcurge 2 km., şi aşteaptă încă o jumătate de oră, rezultă astfel, că avem:

$$\frac{8}{y}=\frac{2}{x}+\frac{1}{2}$$

Sistemul de ecuaţii care rezolvă problema, este:

$$\begin{cases}\dfrac{6}{x}=\dfrac{10}{y}+\dfrac{1}{4}\\[2ex]\dfrac{8}{y}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Adunând prima ecuaţie cu a 2-a inmulţită cu 3, avem:

$$\frac{24}{y}=\frac{10}{y}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2},$$

$$\frac{14}{y}=\frac{7}{4},$$

deci; $y=8$.

Inlocuind în prima ecuaţie, $y=8$, deducem:

$$x=4$$

Viteza călătorului este 4 km. pe oră, iar a poştei rurale este 8 km. pe oră.

Soluţii date de d-nii: *Aniţescu N. Nicolae* (student, Bucureşti), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Constantin Petre* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Dan T. Traian* (bacalaureat), *Fofiu Cornel* (bacalaureat, Beiuş), *Ghiocel V. Vasile* (lic., Giurgiu), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ilie I. Soare* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Margulius Marius* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Mehedinţi D.* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Nenciulescu Hariton* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Păunescu Nicolae* (lic. Milit., Craiova), *Piţulescu N. Gheorghe* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Popa D. Traian* (lic., Giurgiu), *Petre N. Popescu* (student, Bucureşti), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Porumbescu D.* (Tg.-Ocna), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Savovici Florentin* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Stoica Ioan* (S.-Lt.), *Süli Mihai* (Şc. Polit., Timişoara), *Trică S. Ioan* (Constanţa) şi *Zamfir O.* (Şc. Navală).

1075. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=3\\x^3+y^3+z^3-3xyz=18\\x^2y^2z+y^2z^2x+z^2x^2y=66\end{cases}$$

GEORGE BOERESCU

Ecuaţia a 2-a a sistemului dat se mai poate scri:

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=18,$$

şi ţinând seamă de prima ecuaţie, deducem:

$$x+y+z=6 \tag{1}$$

Prima ecuaţie a sistemului se poate scri:

$$(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=3,$$

şi ţinând seama de (1), deducem:

$$xy+yz+zx=11 \tag{2}$$

Ultima ecuaţie a sistemului se poate scri:

$$xyz(xy+yz+zx)=66,$$

şi ţinând seamă de (2), deducem:

$$xyz=6 \tag{3}$$

Sistemul dat este deci echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=6 \end{cases}$$

Ecuaţiile acestui sistem, scriu respectiv suma a trei numere, suma produselor lor luate două câte două şi produsul lor. Rezultă că x, y, z sunt rădăcinele ecuaţiei de gradul al treilea:

$$t^3-6t^2+11t-6=0,$$

care se mai poate scri:

$$(t-1)(t-2)(t-3)=0$$

Avem deci următoarele sisteme de soluţii pentru sistemul dat:

x	1	1	2	2	3	3
y	2	3	1	3	1	2
z	3	2	3	1	2	1

Soluţii date de dnii: *Acikgheozian Nubar* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit. Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit. Craiova), *Cristali Gh.* (Şc. Milit., Aeronantică), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Dan T. Traian* (bacalaureat), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Dini Al. Ioan* (Şc. Milit. de Artilerie), *Fofiu Cornel* (lic. Beiuş), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Păunescu N.* (lic. Milit. Craiova), *Popescu N. Petre* (Bucureşti), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit. Craiova), *Predoescu I. M.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Stoicescu I. Ernest* (Şc. Milit. de Geniu) şi *Trică S. Ioan* (Constanţa).

1078. — *Ştiind că x, y, z sunt unghiurile unui triunghiu, să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{4} \\ \cos x+\cos y+\cos z=\sqrt{2} \\ \sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=2 \end{cases}$$

CEZAR IVANESCU

x, y, z fiind unghiurile unui triunghiu, avem:

$$x+y+z=180^0, \tag{1}$$

astfel că la cele trei ecuaţii ale sistemului dat, adăogăm ecuaţia (1) şi obţinem un sistem de patru ecuaţii cu trei necunoscute. Pentru a vedea dacă acest sistem de patru ecuaţii cu trei necunoscute este compatibil sau nu, vom soluţiona numai un sistem format din trei ecuaţii şi în urmă vom căuta să verificăm dacă e satisfăcută şi ecuaţia rămasă:

Vom rezolva deci sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=180^0 \\ \cos x+\cos y+\cos z=\sqrt{2} \\ \sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=2 \end{cases} \tag{2}$$

Ţinând seamă de relaţia:

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C,$$

unde A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu (Culegere de Probleme, Cap. XVII), ultima ecuaţie din sistemul (2) devine:

$$\cos x\cos y\cos z=0$$

***

$$\cos x=0,$$

şi deci:

$$x=90^0.$$

Sistemul (2), ţinând seamă de valoarea găsită pentru x, se reduce la sistemul:

$$\begin{cases} y+z=90^0 \\ \cos y+\cos z=\sqrt{2} \end{cases} \tag{3}$$

Ecuaţia a 2-a a acestui sistem putându-se scrii încă:

$$2\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{y-z}{2}=\sqrt{2},$$

ea devine ţinând seamă de prima:

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{y-z}{2} = \sqrt{2},$$

de unde deducem:

$$\cos \frac{y-z}{2} = 1,$$

şi deci:

$$y = z$$

Ţinând seamă de prima ecuaţie din (2), rezultă:

$$y = z = 45^0$$

Avem deci:

(4) $$x = 90^0, \quad y = z = 45^0,$$

şi fiindcă sistemul dat este simetric în raport cu x, y, z, putem permuta circular valorile găsite.

Rămâne acum să verificăm şi ultima ecuaţie rămasa, anume:

(5) $$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

In adevăr, primul membru se poate scri succesiv, ţinând seamă de valorile date de (1):

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} = \cos 45^0 \cos^2 22^0, 30' =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1+\cos 45^0}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4} = \frac{1+\sqrt{2}}{4},$$

astfel ecuaţia (5) este verificată, şi sistemul din enunţ este compatibil.

Soluţii date de dnii: *Acikgheozian N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Aniţescu N. Nicolae* (student, Bucureşti), *Coandă I. V.* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit, Craiova), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Dan T. Traian* (bacalaureat). *Dima A. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Fofiu Cornel* (lic., Beiuş), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Motoc D. Mircea* (Olteniţa), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Pănoiu Emanoil* (lic. Carol, Craiova), *Popescu N. Petre* (student, Bucureşti), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Savovici Florentin* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Stoicescu I. Ernest* (Şc. Milit. de Geniu), *Süli Mihai* (Şc. Polit., Timişoara), *Tica P. Marin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Trică S. Ioan* (Constanţa) şi *Zamfir D.* (Şc. Navală).

1080. — *O progresiune aritmetică de 11 termeni, are suma termenilor de rangul 1, 3, 5, 7, 9, 11, egală cu 60; iar suma termenilor de rangul 1, 4, 7, 10, egală cu 34.*

Se cere acea progresiune?

I. DUMITRIU-DADA

Fie a al 6-lea termen dintr'o progresie aritmetică de 11 termeni şi r raţia. Acea progresie se poate scri:

$$\div a-5r,\ a-4r,\ a-3r,\ a-2r,\ a-r,\ a,$$
$$a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ a+4r,\ a+5r.$$

Conform enunţului avem relaţiile:

$$\begin{cases} (a-5r)+(a-3r)+(a-r)+(a+r)+ \\ \qquad (a+3r)+(a+5r)=60 \\ (a-5r)+(a-2r)+(a+r)+(a+4r)=34 \end{cases}$$

Simplificând avem sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} a = 10 \\ 2a - r = 17 \end{cases}$$

Ţinând seamă de prima ecuaţie, din a 2-a deducem:

$$r = 3.$$

Deci $a = 10$, $r = 3$ şi progresia aritmetică cerută este:

$$\div -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25$$

Soluţii date de d-ra: *Nemeş Cornelia* (Şc. Centrală, Bucureşti) şi de d-nii: *Coandă I. V.* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru Marin* (lic. Milit., Craiova), *Curchi I.* (stud., Bucureşti), *Dan T. Traian* (bacalaureat), *Dima A. Gh.* (Şc. Polit, Timişoara), *Fofiu Cornel* (bacalaureat, Beiuş), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Iliescu I. Octavian*, *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic., Roman), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Maşcaş Petru* (lic., Beiuş), *Mehedinţi D. D-tru* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Milea G. E.* (S.-Lt.), *Mitruş Stan* (T.-Măgurele), *Motoc D. Mircea* (Olteniţa), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Patraulea Radu* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Pănoiu Emanoil* (lic. Carol, Craiova), *Petre C-tin* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Popa D. Traian* (lic., Giurgiu), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Predoescu I. M.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Rezeanu P. Marin* (T.-Măgurele), *Sandu Ilie* (T.-Măgurele), *Stoica I.* (Sub.-Lt.), *Süli Mihai* (Şc. Polit. Timişoara), *Theoharide G. Lucian* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Tica P. Marin* (Şc. Milit. de Artilerie) şi *Trică Ioan* (Constanţa).

Observare. D-l Motoc D. Mircea (Olteniţa), a soluţionat următoarea problemă mai generală:

Ştiind că o progresiune aritmetică are suma termenilor de rangul $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ egală cu s, iar suma termenilor de rangul $b_1, b_2, \ldots b_n$ egală cu s_1, se cere primul termen şi raţia progresiunei.

1082. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = a \\ \sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = b \end{cases}$$

TEODOR MARSIEU

Ridicând ambele ecuații la patrat și simplificând, avem:

$$\begin{cases} x - \sqrt{x^2-y} = \dfrac{a^2}{2} \\ y - \sqrt{y^2-x} = \dfrac{b^2}{2} \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y} = x - \dfrac{a^2}{2} \\ \sqrt{y^2-x} = y - \dfrac{b^2}{2} \end{cases}$$

Ridicând din nou la patrat, obținem:

$$\begin{cases} x^2 - y = x^2 - a^2 x + \dfrac{a^4}{4} \\ y^2 - x = y^2 - b^2 y + \dfrac{b^4}{4} \end{cases}$$

sau încă:

$$\begin{cases} a^2 x - y = \dfrac{a^4}{4} \\ b^2 y - x = \dfrac{b^4}{4} \end{cases}$$

Multiplicând, prima ecuație cu b^2 și adunând'o cu a 2-a, deducem valoarea lui x, și apoi analog obținem și pe y, astfel că găsim:

$$\begin{cases} x = \dfrac{b^2(a^4+b^2)}{4(a^2b^2-1)} \\ y = \dfrac{a^2(a^2+b^4)}{4(a^2b^2-1)} \end{cases}$$

care formează sistemul de soluții.

Soție dată de d-ra: *Oțel Țațiana* (studentă, Cluj) și de d-nii: *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Curchi Ioan* (student, București), *Dan T. Traian* (bacalaureat), *Dima Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Ghiocel V. Vasile* (lic., Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit, Tg.-Mureș), *Iliescu T. Octavian* (lic. T.-Măgurele), *Ivănescu Cezar* (lic., Bârlad), *Lățea P. C-tin* (Șc. Milit. de Artilerie), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic., Roman), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Mereuță Emilian* (student, București), *Meteș Stan* (lic. T.-Măgurele), *Motoc D. Mircea* (Oltenița), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București), *Pănoiu Empnoil* (lic. Carol, Craiova), *Păunescu N.* (lic. Milit, Craiova), *Petre C-tin* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Popa D. Traian* (lic., Giurgiu), *Popescu C. Ștefan* (lic. Milit., Craiova), *Predoescu I. M.* (lic. Buzești, Craiova), *Rezeanu M.* (lic., T.-Măgurele), *Sandu Ilie* (lic., T.-Măgurele), *Schwartz B. Naftale* (lic., Botoșani), *Stoica D.* (Sub.-Lt.), *Süli Mihai* (Șc. Polit., Timișoara), *Țica P. Marin* (Șc. Milit. de Artilerie) și *Trică Ioan* (Constanța).

1086. — *Știind că* $\dfrac{b}{a} = tg\,\varphi$, *să se stabilească identitatea:*

$$\frac{(a^2+b^2)\sin 2x + 2ab}{(a^2-b^2)\sin 2x - 2ab\cos 2x} = \frac{\sin(x+\varphi)}{\sin(x-\varphi)}$$

CEZAR IVANESCU

Notând primul membru cu E, impărțind numărătorul și numitorul prin ab, ținând seamă de relația de condiție dată și de unele formule de trigonometrie cunoscute, putem scri succesiv:

$$E = \frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\sin 2x + 2}{\left(\frac{b}{a}-\frac{b}{a}\right)\sin 2x - 2\cos 2x} =$$

$$\frac{\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}+\frac{\sin\varphi}{\cos\pi}\right)\sin 2x + 2}{\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\sin 2x - 2\cos 2x} =$$

$$\frac{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\sin 2x + \sin 2\varphi}{(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\sin 2x - \sin 2\varphi\cos 2x} =$$

$$\frac{\sin 2x + \sin 2\varphi}{\cos 2\varphi\sin 2x - \sin 2\varphi\cos 2x} =$$

$$\frac{2\sin(x+\varphi)\cos(x-\varphi)}{\sin 2(x-\varphi)} =$$

$$\frac{2\sin(x+\varphi)\cos(x-\varphi)}{2\sin(x-x)\cos(x-\varphi)} = \frac{\sin(x+\varphi)}{\sin(x-\varphi)}$$

Astfel identitatea cerută este stabilită.

Soluții date de d-rele: *Hortopan Ana* (studentă Cluj), *Oțel Țațiana* (studentă Cluj) și de d-nii: *Coandă I. Virgil* (lic. Milit, Craiova), *Cojocaru M. Mircea* (lic. Milit., Craiova), *Dima Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Fofiu Cornel* (bacalaureat, Beiuș), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Iliescu Tr. Octavian* (lic. T.-Măgurele), *Lupescu Gh. C.* (student), *Margulius Marius* (București), *Mereuță Emilian* (student, București), *Meteș Stan* (T.-Măgurele), *Millea G. E.* (Sub.-Lt.), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București), *Popescu C. Ștefan* (lic. Milit., Craiova), *Rezeanu P. Marin* (T.-Măgurele), *Stoica D.* (Sub.-Lt.), *Süli Mihai* (Șc. Polit., Timișoara), *Tica P. Marin* (Șc. Milit. de Artilerie) și *Trică Ioan* (Constanța).

PROBLEME PROPUSE

1137. — Avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 pris une fois, former trois nombres de trois chiffres, tels que l'un de ces nombres égale la sommes des deux autres et soit un cube parfait.

V. THÉBAULT

1138. — Să se verifice identitatea:

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{(x^2+y^2)^2},$$

unde:

$$A=y^4(x^{12}y^4-1)+2x^2y^2(x^8y^8-1)+x^4(x^4y^{12}-1)$$

$$B=y^8(x^{16}-1)+4x^2y^6(x^{12}y^4-1)+$$

$$6x^4y^4(x^8y^8-1)+4x^6y^2(x^4y^{12}-1)+x^8(y^{16}-1)$$

Să se transforme apoi, identitatea dată intr'o identitate trigonometrică prin substituţia:

$$x=e^{i\frac{\alpha}{2}},\ y=e^{i\frac{\alpha_1}{2}},\ (i=\sqrt{-1})$$

V. ALACI

1139. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} xy+yz+zx=11 \\ x^2+y^2+z^2+x^2y^2z^2=50 \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=49 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

1140. — Dacă într'un triunghiu ABC prin punctul de intersecţie O al medianelor BN şi CM ducem paralela DE la BC şi dacă Q este intersecţia medianei AP cu MN, avem relaţia:

$$\frac{3\overline{AN}+2\overline{NE}+\overline{EC}}{3\overline{AM}+2\overline{MD}+\overline{DB}}=2\frac{\overline{AN}}{\overline{AB}}$$

S-LT. IOAN C. SAVIN

1141. — In triunghiul ABC se duc la cercul înscris, tangente paralele cu laturile şi se obţine trei triunghiuri. Fie, $r_1, r_2, r_3, p_1, p_2, p_3, s_1, s_2, s_3$ respectiv razele cercurilor înscrise, semiperimetrele şi ariile celor trei triunghiuri mici. Să se stabilească relaţiele:

$$p_1+p_2+p_3=p$$

$$p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1=(r_1+r_2+r_3)(r_a+r_b+r_c)$$

$$p_1p_2p_3=(r_1+r_2+r_3)^2(p_1+p_2+p_3)$$

$$\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}+\sqrt{s_3}=\sqrt{s},$$

r_a, r_b, r_c, s fiind notaţiile obicinuite la triunghiul ABC.

CEZAR COSNITA

1142. — Fie ABC un triunghiu oarecare şi A_1, B_1, C_1, punctele unde înălţimele tae cercul circumscris. Tangentele duse acestui cerc respectiv prin A_2, B_2, C_2 formează triunghiul $A'B'C'$. Să se demonstreze că:

1°. Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt omologice.

2°. Suprafaţa s' a triunghiului $A'B'C'$ în funcţie de elementele triunghiului ABC este dată de formula:

$$s'=\frac{8R^2\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}{(\operatorname{tg}^2A-1)(\operatorname{tg}^2B-1)(\operatorname{tg}^2C-1)}$$

CEZAR IVANESCU

1143. — Să se arate că în orice triunghiu avem:

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{(c-a)(c-b)(b-a)}=$$

$$\frac{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}{\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2}-\cot\frac{B}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}-\cot\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{C}{2}\right)}$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu

ION MARGINEANU

1144. — Să se stabilească identitatea:

$$4R\sum\frac{h_ah_b}{\beta_a\beta_b}\sin\frac{C}{2}=r\sum[ab(a+b)+c^3]$$

CONSTANTIN LATEA

INFORMAȚIUNI

LA REDACȚIA „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIȘOARA SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL V-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO

COSTUL UNUI ABONAMENT FIIND DE 300 LEI ȘI PENTRU ANUL AL III-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

COSTUL ABONAMENTULUI FIIND DE 125 LEI, PUBLICATE ÎN BUENOS AIRES; AMÂNDOUĂ 400 LEI

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XII. 15 NOEMBRIE 1932 NO. 9.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 COL GH. BUICLIU SOLUTIA GENERALA A PROBLEMEI 518.

2. M. V. THÉBAULT SUR LE TRIANGLE ISOCÈLE.

3. D. V. IONESCU CATEVA APLICATII ALE TEOREMELOR LUI GULDIN.

4. NOTE MATEMATICE: 22, 23.

5. CHESTIUNI DE EXAMEN SCOALA POLITECHNICA DIN TIMISOARA.

6. BIBLIOGRAFIE

7. PROBLEME REZOLVATE: 150, 1087, 1088, 1089, 1090.

8. PROBLEME PROPUSE: 1145-1152

9. INFORMATIUNI

TIMISOARA

Institut de Artegrafice „Tipografia Romănească"

Avem plăcerea a anunța că începând de la 15 Octomvrie 1932, mai face parte dintre membrii „REVISTEI MATEMATICI DIN TIMIȘOARA“ și D-l Vasiliu-Leoben Gh., inginer-geodet, str. Eminescu 22, București, fost corespondent distins al „REVISTEI“.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Școala Politechnică din Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XI inclusiv, broșate, 120 lei fiecare.

ANUL XII — NO. 9. TIMISOARA, 15 NOEMBRIE 1932

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

SOLUȚIA GENERALĂ A PROBLEMEI 518

de COL. GH BUICLIU

1°. In *Revista Matematică din Timișoara* din acest an, s-a publicat la pagina 9 soluția problemei 518 al cărei enunț este:

Să se găsiască numerele de 4 cifre ale căror patrate perfecte se termină cu de 3 ori numărul însuși.

Restricția ca numărul să fie de 4 cifre și ca patratul să se termine cu de 3 ori rădăcina, a îngăduit să se dea problemei o soluțiune aritmetică elementară. Numărul căutat N, este definit de una din relațiunile

$$N(N-3) = \text{Mult.}\, 10^4 \quad \text{sau} \quad N(N-3) = \text{Mult.}\, 10^5$$

după cum $3N$ are 4 sau 5 cifre.

2°. Generalizarea problemei 518 se poate enunța sub forma:

Fiind date numerele a și n, se cere să se găsiască numărul N așa în cât diferența sau suma între N^2 și aN să fie un multiplu al lui 10^n.

Acest anunț conduce la una din următoarele ecuațiuni

$$(1) \qquad N(N-a) = 10^n M$$

$$(2) \qquad N(a-N) = 10^n M$$

$$(3) \qquad N(N+a) = 10^n M$$

în care trebuie determinate valori întregi pozitive pentru N și M.

Din (1) se scoate

$$N = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4 \cdot 10^n M}}{1}$$

De oare ce M este pozitiv, urmează că

$$\sqrt{a^2 + 4 \cdot 10^n M} > a$$

așa că nu va trebui considerat semnul minus înaintea radicalului.

Pentru ca N să fie real, trebuie găsite numerele M și k așa în cât

$$a^2 + 4 \cdot 10^n M = k^2$$

$$\overset{*}{**} \qquad k^2 - a^2 = 4 \cdot 10^n M$$

Se vede de aici că numerele k^2 și a^2 trebuie să aibă ultimele n cifre identice. De oare ce a^2 este cunoscut, k^2 se poate determina urmând cuvânt cu cuvânt principiile stabilite de D-l *I. V. Mătieș* în *Gazeta Matematică* Vol. XXXVII pagina 366 în articolul *„Asupra ultimului grup de p cifre ale patratelor perfecte"*.

Din valorile pe care le poate avea k, se vor alege numai acelea pentru care diferența $k^2 - a^2$ se divide prin $4 \cdot 10^n$ — O dată determinat k, prin simpla împărțire a lui $k^2 - a^2$ prin $4 \cdot 10^n$ se determină M.

Dacă a^2 are mai puțin de n cifre, atunci k^2 se va termina cu un număr oarecare de zeruri după care urmează a^2, așa că în acest caz k^2 va fi de forma $l\,m \ldots p\,0\,0 \ldots 0\,a^2$.

Din (2) se scoate

$$N = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot 10^n M}}{2}$$

In acest caz k poate păstra dublul semn pentru valorile lui k mai mici de cât a. Condiția de realitate a lui N este

$$a^2 - 4 \cdot 10^n M = k^2$$

$$\overset{*}{**} \qquad a^2 - k^2 = 4 \cdot 10^n M$$

care se rezolvă în numere întregi ca și ecuația corespunzătoare dedusă din (1).

Dacă a^2 are mai puțin de n cifre, problema nu mai este posibilă în cazul (2) pentru numere pozitive.

Din (3) se scoate

$$N=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4\,.\,10^n M}}{2}$$

Semnul minus înaintea radicalului trebuie eliminat, iar din numerele k se vor elimina acelea mai mici de cât a.

3°. Problema generală pusă la 2° se poate rezolva şi pe altă cale, când numărul a este nepereche. In acest caz perechile de numere N şi $N-a$, N şi $a-N$, N şi $N+a$ neputând fi simultan perechi, ecuaţiunile (1), (2), (3) conduc la noi ecuaţiuni după cum urmează.

(1) conduce la

$$(4)\ \begin{cases} N=2^n 5^\alpha x \\ N-a=5^{n-\alpha} y \end{cases} \text{ sau } (5)\ \begin{cases} N=5^{n-\alpha} x \\ N-a=2^n 5^\alpha y \end{cases}$$

Din (2) se deduce

$$(6)\ \begin{cases} N=2^n 5^\alpha x \\ a-N=5^{n-\alpha} y \end{cases} \text{ sau } (7)\ \begin{cases} N=5^{n-\alpha} x \\ a-N=2^n 5^\alpha y \end{cases}$$

In fine din (3) urmează

$$(8)\ \begin{cases} N=2^n 5^\alpha x \\ N+a=5^{n-\alpha} y \end{cases} \text{ sau } (9)\ \begin{cases} N=5^{n-\alpha} x \\ N+a=2^n 5^\alpha y \end{cases}$$

Rezolvarea în numere întregi a ultimelor 6 ecuaţiuni se face la fel.

Din (4), de exemplu se scoate

$$N=2^n 5^\alpha x=5^{n-\alpha} y+a$$

$$(10)\qquad 2^n 5^\alpha x-5^{n-\alpha} y=a$$

De oare ce 5^α divide membrul I, trebuie să dividă şi pe a, prin urmare α va fi egal cu una oare care din puterile lui 5 care divid pe a. Dacă a este prim cu 5 atunci α este nul, dacă a are ca divizor pe 5^i atunci α poate avea toate valorile întregi de la 0 la i inclusiv când $i<n$ sau de la 0 la n când $i>n$.

Cu acesta problema se reduce la a rezolva în numere întregi ecuaţiunile (10) în care α ia pe rând toate valorile întregi de la 0 la i sau de la 0 la n.

Rezolvarea în numere întregi a ecuaţiunei (10) este cunoscută, ea se face în general cu ajutorul fracţiilor continue după principiile de rezolvare în numere întregi a ecuaţiunei

$$Ax+By=C,$$

principii cunoscute şi publicate în mai toate tratatele de algebră.

Ecuaţiunile (5), (6), (7), (8), (9) conduc la ecuaţii analoage cu (10).

4°. In anumite cazuri particulare, rezolvarea în numere întregi a unei ecuaţiuni ca (10) se poate face şi pe cale mai elementară. Să luăm de exemplu

$$a=3\quad,\quad n=4$$

ca în cazul problemei 518, dar fără a ii pune restrictia că N să fie de 4 cifre, evident că în acest caz nu vom mai examina ecuaţiile (6) şi (7), căci a este prea mic. In schimb ecuaţiile (4), (5), (8), (9) dau după înlocuire

$$(4')\qquad 2^4 x-5^4 y=3$$

$$(5')\qquad 5^4 x-2^4 y=3$$

$$(8')\qquad 2^4 x-5^4 y=-3$$

$$(9')\qquad 5^4 x-2^4 y=-3$$

soluţiile ultimelor 2 deducându-se din acelea ale primelor 2 prin simpla permutare a necunoscutelor x şi y. Numărul α s-a luat egal cu zero pentru că 3 este prim cu 5.

Ecuaţia (4') se mai poate scrie

$$16x=624y+y+3$$

De oarece $624y$ se divide prin 16 trebuie să avem

$$y+3=16t \qquad y=16t-3$$

şi deci

$$x=625t-117$$

aşa că N cerut de (4) va fi unul oare care din numerele

$$(I)\qquad N=16\times 625t-16\times 117=10000t-1872$$

în care t are ori ce valoare pozitivă în afară de zero. Ca verificare avem

$$N(N-3)=(10^4 t-1872)(10^4 t-1875)=$$

$$10^4 M+351\,.\,10^4=\text{Mult. }10^4$$

Cea mai mică valoare a lui N este

$$N=10000-1872=8128$$

Procedând la fel, dar plecând de la (5') se găseşte

$$(II)\qquad N=10000t+1875$$

Cea mai mică valoare a lui N se obţine pentru $t = 0$:

$$N = 1875$$

De asemeni din (8′) (9′) se deduce

(III) $\qquad N = 10000\,t + 1872$

(IV) $\qquad N = 10000\,t - 1875$

Cele mai mici valori ale lui N din (III) şi (IV) sunt respectiv

1872 şi 8125

Din cele 4 soluţii minime de la (I), (II), (III) şi (IV) numai 1875^2 se termină cu 3×1875, adică răspunde condiţiei restrictive din problema 518.

Se mai observă din aceste soluţiuni că problema nu admite, pentru $a = 3, n = 4$, soluţii de cât numere de 4 sau mai multe cifre.

5°. Pentru rezolvarea problemei generale de la 2° a fost nevoie să se rezolve în numere întregi o ecuaţie de forma

$$k^2 - a^2 = 4 \cdot 10^n M$$

sau mai general

$$x^2 - y^2 = c \cdot 10^n$$

Ţin să informez pe corespondenţii pe care i-ar interesa rezolvarea în numere întregi a acestei ecuaţii, că pentru cazul când c este număr de o cifră vor găsi soluţia în articolul meu întitulat *„Patrate psendogemene“*, publicat în *Gazeta Matematică* Vol. XXXI pagina 402.

SUR LE TRIANGLE ISOCÈLE

par M. V. THÉBAULT

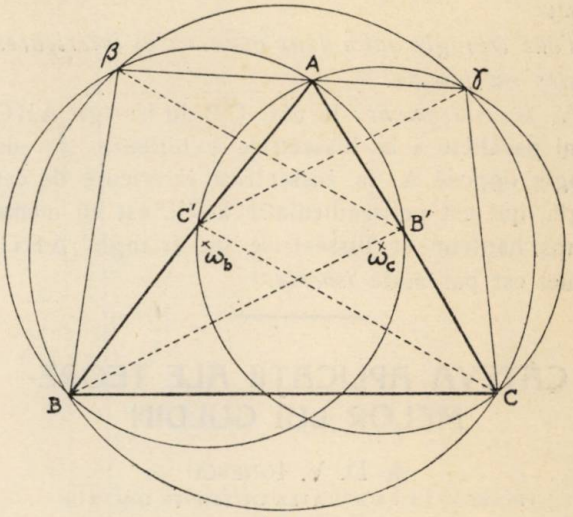
1. Sur les côtés B A et A C d'un triangle *quelconque* A B C, on marque des points arbitraires C′ et B′. Les cercles (ω_b) et (ω_c), circonscrits aux triangles B A B′ et C C′ A, coupent respectivement la bissectrice extérieure de l'angle A en β et γ. *Les triangles* B β B′ et C′ γ C *sont isocèles et semblables,* à cause de ces égalités d'angles

$$\beta B' B = \beta A B = 90^0 - \frac{A}{2} = C A \gamma = B' B \beta,$$

$$C C' \gamma = C A \gamma = 90^0 - \frac{A}{2} = \beta A B = \gamma C C',$$

$$B \beta B' = C' \gamma C = B A C = A. \ ^1)$$

2. Supposons que les points C′, B′, coïncident



respectivement avec les pieds des bissectrices intérieures du triangle A B C sur B A, A C.

Les angles opposés B β γ et γ C B, du quadrilatére B β γ C, s'expriment respectivement

$$B \beta \gamma = B \beta B' + B' \beta A = B \beta B' + B' B A = A + \frac{B}{2},$$

$$\gamma C B = \gamma C C' + C' C B = 90^0 - \frac{A}{2} + \frac{C}{2},$$

et

$$B \beta \gamma + \gamma C B = 180^0.$$

Le quadrilatére B β γ C *est donc inscriptible dans une circonférence* (Σ) [2].

3. Si l'on suppose eufin un triangle A B C dans lequel les bissectrices intérieures B B′ et C C′ sont *égales,* les cercles $(\omega_b), (\omega_c)$, circonscrits aux triangles B A B′ C C′ A, sont aussi *égaux*, ainsi que les triangles isocèles B β B′, C′ γ C.

Les cordes B β et C γ sont donc *égales*. Par suite les cordes β γ et C B, qui joignent les extrémités de deux cordes égales dans la circonférence (Σ), sont *parallèles,* et les angles

[1]) Ces développements nous on été suggérés par une figure considérée par *M. N. Abramescu, G. M.* XXXVIII, question 4115—73.

[2]) *V. Thébault, Education mathématique*, 1930—57.

$$CB\beta = B'B\beta + \frac{B}{2}, \text{ et } \gamma CB = \gamma CC' + \frac{C}{2},$$

du quadrilatère $B\beta\gamma C$, sont *égaux*.

Alors $B = C$, et le triangle ABC est isocèle. Ainsi se trouve établi à noveau ce théorème bien connu.

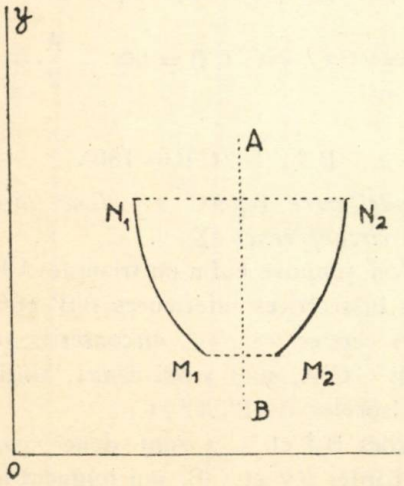
Tout triangle qui a deux bissectrices intérieures égales est isocèle. [1])

N. B. Autrement: le côté CB du triangle ABC étant parallèle à la bissectrice extérieure, $\beta\gamma$ de l'angle opposé A, la bissectrice intérieure de cet angle, qui est perpendiculaire à $\beta\gamma$, est en même temps hauteur et bissectrice du triangle ABC, lequel est par suité *isocèle.*

CÂTEVA APLICAȚII ALE TEOREMELOR LUI GULDIN

de D. V. IONESCU
PROFESOR LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE DIN CLUJ

1. Să considerăm în planul xOy arcul de curbă M_2N_2 și axa AB paralelă cu Oy. Să notăm cu M_1N_1 simetricul acestui arc în raport cu AB. Fie S_2 și S_1 suprafețele născute de arcele M_2N_2, M_1N_1 în rotirea lor de un unghiu egal cu 2π în jurul lui Oy.



Vrem să arătăm că *diferența dintre suprafețele* S_2 *și* S_1 *este independentă de poziția axei* Oy *față de arcele* M_2N_2, M_1N_1 *și axa* AB.

[1]) Pour la Bibliographie de ce problème, voir, par exemple, *Mathesis*, 1923—337 et 1930—97.

Intr'adevăr fie a absciza lui A, ξ distanța centrului de greutate al arcului M_2N_2 la axa AB și l, lungimea arcului M_2N_2. Aplicând prima teoremă a lui *Guldin,* avem

$$S_2 = 2\pi l(a + \xi), \quad S_1 = 2\pi l(a - \xi)$$

de unde rezultă că

$$S_2 - S_1 = 4\pi l\xi.$$

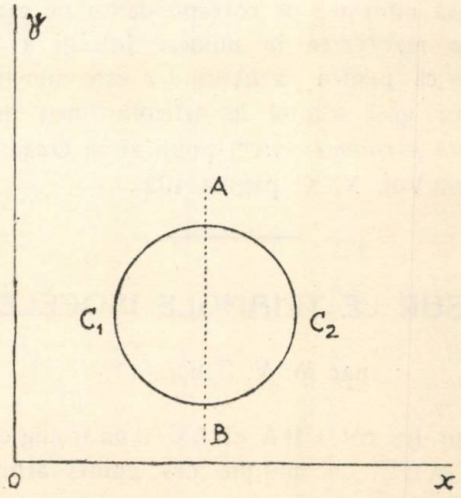
Insă $2\pi l\xi$ reprezintă suprafața S născută de arcul M_2N_2 în rotirea lui de unghiul 2π în jurul lui AB. Avem deci

$$S_2 - S_1 = 2S \tag{1}$$

Din această formulă se vede că diferența $S_2 - S_1$ nu depinde decât de poziția arcului M_2N_2 față de axa AB.

Să aplicăm formula (1) la tor.

Torul ia naștere prin rotirea cercului de diametru AB, paralel cu Oy, în jurul lui Oy. Suprața torului se compune din două părți: partea exterioară S_2 care ia naștere prin rotirea semicercului AC_2B în jurul lui Oy și partea interioară S_1 care ia naștere prin rotirea semicercului AC_1B în jurul lui Oy.

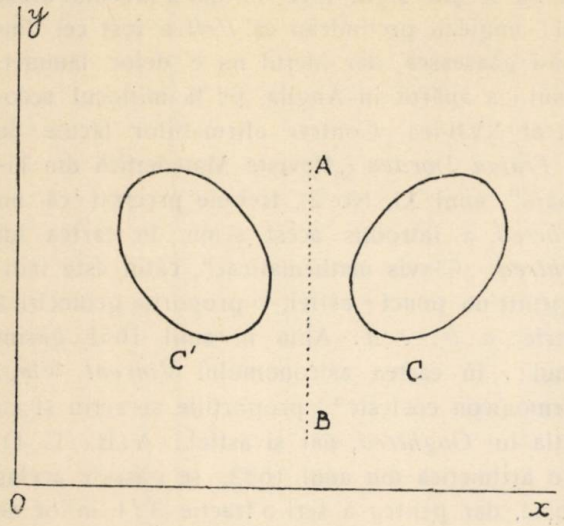


Formula (1) arată că diferența $S_2 - S_1$ este independentă de raza torului și că este egală cu dublul suprafeței sferei de diametru AB.

2. Să considerăm acum în planul xOy conturul închis (C) și fie (C') conturul simetric în raport cu axa AB. Notăm cu V_2 și V_1 volumele născute de

BIBLIOTECA „ASTRA" SIBIU

contururile (C) şi (C') în rotirea lor de unghiul 2π în jurul lui Oy.



Vrem să arătăm că *diferenţa între volumele* V_2 *şi* V_1 *este independentă de poziţia axei* Oy *faţă de contururile* (C) *şi* (C').

Intr'adevăr fie S suprafaţa închisă de conturul (C) şi ξ_1 distanţa centrului de greutate al ei la axa AB.

Aplicând a doua teoremă a lui *Guldin*, vom avea

$$V_2 = 2\pi(a + \xi_1)S, \quad V_1 = 2\pi(a - \xi_1)S,$$

de unde rezultă că

$$V_2 - V_1 = 4\pi\xi_1 S.$$

Insă $2\pi\xi_1 S$ reprezintă volumul V născut în rotirea de unghiul 2π a conturului (C) în jurul axei AB, aşa că formula precedentă devine

$$V_2 - V_1 = 2V \tag{2}$$

Această formulă ne arată că diferenţa dintre volumele V_2 şi V_1 nu depinde decât de poziţia conturului (C) faţă de axa AB.

Să aplicăm formula (2) la tor (vezi fig. 2)

Volumul torului se compune din două părţi volumul exterior V_2 născut de semicercul AC_2BA în rotirea lui în jurul lui Oy şi volumul interior V_1, născut de semicercul AC_1BA în rotirea lui în jurul lui AB.

Formula (2), arată că diferenţa dintre volumul exterior V_2 şi cel interior V_1 este independentă de raza torului şi este egală cu de două ori volumul sferei de diametru AB.

NOTE MATEMATICE

22. — *Semnele înmulţirii şi ale împărţirii.*

Inmulţirea. Semnele pentru a indica o înmulţire au apărut mai târziu decât semnele adunării şi ale scăderii. Precum se scrie 7 m sau 5 km, tot aşa algebriştii din secolul al XVI-lea scriau 6 Pri; în loc de $6x$, şi $7z$ (7 zenzo sau 7 censo), în loc de $7x^2$. Se găsesc şi altfel de scrieri:

2.43.86, $\left|\begin{array}{c|c|c} 17 & 18 & 306 \\ 17 & 19 & 323 \end{array}\right|$, dar aici punctul (.) nu
2.44.88

este un semn de operaţie, ci serveşte numai pentru separarea factorilor, la fel şi liniuţele verticale. O tablă de înmulţire e exprimată cu cuvinte: „2 ora 5 fa 10". Semnul $\times$ apare în Anglia, în preajma anului 1600. E aproape sigur că acest semn a fost întrodus de *William Oughtred*, în cartea lui, „Clavis mathematicae" (1631); e drept că, pe lângă tablele logaritmice ale lui *Napier*, publicate în limba engleză de către *Edward Wright* (1618), se găseşte un apendice, cu următorul pasagiu: „semnul adunării este (+), al scăderii (—), al înmulţirii (X)". Dar acest apendice e scris, după cum crede *Florian Cajori* („History of mathematical notations", vol. I, pag. 251), tot de *Oughtred*. Pe de altă parte, cercetările amănunţite ale lui *Cajori* par a fi dovedit că nici-un autor n'a întrebuinţat acest semn, în înţelesul lui actual, înaintea lui *Oughtred*. In schimb, semnul însuşi (crucea sf. Andrei) a servit pentru o mulţime de alte scopuri. Găsim, astfel, în cartea lui *D. E Smoth* („History of Mathematics", vol. II, pag. 405), de unde am luat aproape tot materialul pentru această notă, următoarele lui întrebuinţări:

1. Pentru împărţirea fracţiunilor; astfel, se scria: $\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\frac{9}{10}$ în loc de $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} = \frac{9}{10}$. Se înmulţea, de fapt, cu fracţia a 2-a răsturnată, cum se face şi astăzi.

2. Pentru adunarea fracţiunilor; se scria:

$$\begin{matrix} 24 & 25 \\ \frac{4}{5}\times\frac{5}{6}, \\ 30 \end{matrix}$$

în loc de $\frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{24+25}{30}$.

3. Pentru a arăta produsele egale într'o proporţie; se scria:

$\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\times\begin{matrix}4\\6\end{matrix}$, în loc de $2:3=4:6$.

4. Pentru a indica așa numita „înmulțire în cruce". Astfel, un matematician italian *Ghaligai* scrie (1551):

$\begin{matrix}7\text{ piu }\not R\,48\\ \times\\ 7\text{ piu }\not R\,48\end{matrix}$, în loc de $(7+48)(7+\sqrt{48})$.

In special, această întrebuințare a semnului ($\times$) putea să ducă la adoptarea lui excluzivă pentru operația înmulțirii. E foarte curios că cărțile de aritmetică s'au lipsit foarte mult de acest semn, — care, într'adevăr, nu e absolut necesar, încât abia în a 2-a jumătate a secolului trecut el devine universal întrebuințat în aritmetica elementară.

In Algebră, semnul acesta n'a fost bun, din cauza asemănării lui cu litera x. De aceea, probabil, s'a inventat semnul (.), datorit, după părerea generală, matematicianului englez *Thomas Harriot,* care, într'o carte din anul 1631, scrie „2.aaa", în loc de $2\,a^3$. *Cajori,* în cartea lui mai sus citată, arată, însă, că nu se știe sigur dacă e vorba de o înmulțire propriu zisă, sau, poate, punctele puse după coeficienții numerici, servesc, ca în vechile manuscrise și în primele cărți tipărite, numai pentru a separa numerele de textul curent. Marele matematician german *Leibnitz* introduce definitiv punctul, ca semnul înmulțirii, după ce a încercat mai multe alte semne, ca de ex., litera C în poziția orizontală (ↄ), *Christian Wolf* a contribuit cel mai mult pentru răspândirea noului semn. Se menține și scrierea literelor una după alta, fără nici-un semn între ele, când nu se poate produce nici-o confuzie.

Impărțirea. Englezii și Americanii au întrebuințat și întrebuințează, pentru a indica o împărțire, semnul $\div$, pe când celelalte popoare au preferat semnul :. Primul semn a servit pe vremuri pentru operația scăderii. E destul de vechi, și unii negustori din Lombardia se serveau de el în secolul al XV-lea, pentru a arăta că e vorba de o jumătate a sumei înscrise: $4\div$, în loc de 2. Intr'o carte tipărită el apare, ca semn al împărțirii, abia în anul 1659 („Teutsche Algebra", de *Johann Heinrich Rahn*). In curând, englezul *John Pell* traduce cartea lui Rahn (1668), și acest semn se întrebuințează din ce în ce mai mult în Anglia și America. *Pell* a fost elevul lui *Rahn* la Zürich, încât nu se știe sigur care din doi a inventat acest semn: englezii pretindeau că *Pell* a fost cel dintâi să-l găsească, dar lucrul nu e deloc lămurit. Semnul : a apărut în Anglia, pe la mijlocul secolului al XVII-lea. Contrar afirmațiilor făcute de (+) *Traian Dordea* („Revista Matematică din Timișoara", anul XI, No 2), trebuie precizat că nu *Oughtred* a întrodus acest semn. In cartea lui *Oughtred,* „Clavis mathematicae", câtul este indicat printr'un punct; astfel, o proporție geometrică se scrie: $a.b::c.d$. Abia în anul 1651 găsim semnul :, în cartea astronomului *Vincent Wing,* „Harmonicon coeleste"; proporțiile se scriu și cu notația lui *Oughtred,* dar și astfel: A:B::C:D. Intr'o aritmetică din anul 1633, se găsește același semn(:), dar pentru a scri o fracție (3:4, în loc de $\frac{3}{4}$). *Leibnitz,* care a încercat și semnul (ↄ) pentru împărțire, a adoptat, în cele din urmă, semnul :, care s'a răspândit în toată lumea, afară de țările anglo-saxone. S'a crezut că acest semn provine din semnul $\div$, căruia îi suprimăm liniuța orizontală, dar această presupunere nu e deloc justificată. Din contra, semnul : fiind mai răspândit, e probabil că semnul $\div$ vă dispărea cu timpul. In orice caz, predilecția anglo-saxonilor pentru semnul $\div$ a fost foarte puternică, și cărțile cu cealaltă notație sunt extrem de rare, aproape nici nu există.

PETRE V. CAZANACLI
PROFESOR SECUNDAR, IAȘI.

23. — *Asupra problemei 1027.*

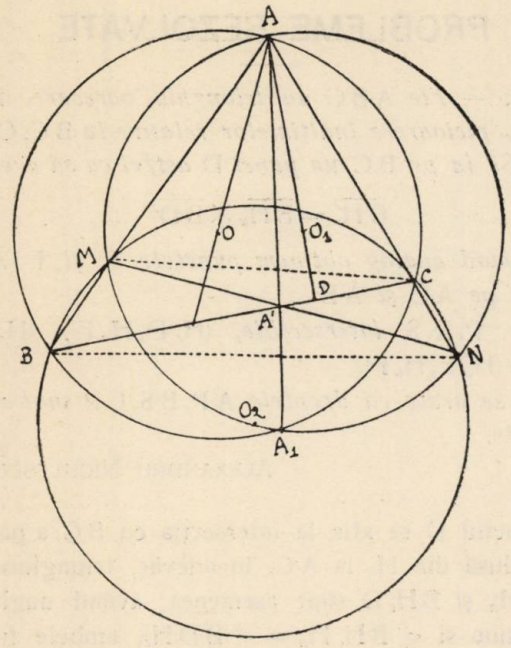
Problema 1027 este susceptibilă de generalizare în modul următor:

Fie A B C *un triunghiu oarecare înscris în cercul* O, *iar* A′ *și* A_1 *punctele unde o dreaptă oarecare dusă prin vârful* A *al triunghiului, tae respectiv latura* B C *și cercul circumscris. Perpendiculara dusă prin* A′ *pe diametru* A O *tae laturile* A B, A C *în* M, N.

Punctele A, M, A_1, N *sunt pe un cerc care are centrul pe înălțimea ce pleacă din* A *în triunghiul* A B C.

Soluția. Fie D piciorul înălțimei care pleacă din A. Triunghiurile A B C și A M N sunt asemenea

cum uşor se poate constata; diametrul A O al cercului circumscris lui A B C, este înălţime în triunghiul A M N, iar înălţimea A D a triunghiului A B C este diametru în cercul circumscris triunghiului A M N, căci A O şi A D sunt ceviene isogonale.



Cercul ce trece prin punctele A, M, N are prinurmare centrul pe înălţimea A D. Să arătăm că şi punctul A_1 se găseşte pe acest cerc.

Pentru aceasta considerăm triunghiurile asemenea A B C şi A M N care ne dau:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AN}{AM}$$

de unde rezultă că dreptele M C şi B N sunt antiparalele şi prinurmare patrulaterul B M C N este inscriptibil.

Considerând cercurile circumscrise triunghiurilor A B C, A M N şi acel circumscris patrulaterului B M C N pe cari să le notăm respectiv prin O, O_1 şi O_2 observăm că: axul radical al cercuricor O şi O_2 este B C, iar axul radical al cercurilor O_1 şi O_2 este M N. Intersecţia dreptelor B C şi M N, adică A' este tocmai centrul radical al celor trei cercuri. Axul radical al cercurilor O şi O_1 trebuind evident să treacă prin A şi A' nu poate fi decât A A' şi prinurmare punctul A_1 se găseşte şi el pe cercul circumscris triunghiului A B C.

Proprietatea este astfel demonstrată.

Cazuri particulare.

In afară de problema 1027 în cazul căreia dreapta A A' se confundă cu diametru A O, dau încă următorul caz particular remarcabil:

Intr'un triunghiu oarecare A B C înscris în cercul O, înălţimea ce pleacă din A tae latura B C şi cercul O respectiv în D şi E. Perpendiculara dusă din D pe A O tae laturile A B, A C în M şi N.

Punctele A, M, E, N sunt pe un cerc ce are centrul pe mijlocul segmentului A E.

CEZAR IVANESCU

CHESTIUNI DE EXAMEN ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Examen de admitere în anul pregătitor

Lucrări scrise

Geometrie

I.

Dacă prin vârful B al unui triunghiu A B C, ducem o dreaptă oarecare Δ, iar printr'un punct B' al laturei opuse, ducem paralele cu celelalte două laturi B C şi B A, respectiv B' C' şi B' A', obţinem pe dreapta Δ două puncte D_1 şi D_2. Să se demonstreze că dreptele A D_1 şi C D_2 sunt paralele.

II.

Măsura lungimii comune a înălţimelor egale B B' = C C' ale unui triunghiu isoscel B A C, este 6 cm., iar măsura înălţimiii A A' a aceluiaşi triunghiu este 5 cm. Să se construiască triunghiul isoscel B A C (Aproximaţie mai mică ca 0,1 mm.).

Să se calculeze raporturile în care înălţimele triunghiului B A C împart laturile opuse

$(8\frac{1}{2} - 11\frac{1}{2}$, 17 Octombrie 1932)

Algebră

I.

Un călător pleacă pe jos din Timişoara spre satul A, la 10 km. depărtare. La 2 km. de Timişoara este ajuns de un biciclist, care trece înainte, ajunge în satul A, stă acolo un sfert de oră, se întoarce înapoi spre Timişoara şi la 2 km. de satul A, întâlneşte din nou pe călător, care îşi continua drumul. In fine călătorul ajunge în satul A, iar biciclistul după o jumătate de oră, ajunge la Timişoara.

Considerând mişcările uniforme, să se afle vitezele în km. pe oră, a călătorului şi a biciclistului.

II.

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 23 \\ xy + yz + zx = 107 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 110 \end{cases}$$

III.

In triunghiul A B C se duce bisectoarea A D a unghiului A. Să se calculeze laturile şi unghiurile triunghiului A B C, cunoscând :

$$A D = 10\,\text{cm}, \quad B D = 5\,\text{cm}., \text{ şi } \sphericalangle A = 60^0.$$

(3 — 6, 17 Octombrie 1932)

Aritmetică

I.

O persoană îşi împarte suma încasată din vânzarea unui teren de construcţie, în formă de patrat, în două părţi A şi B, proporţional cu numerile 3 şi $\frac{2}{3}$.

Dobânda adusă de capitalul A, împrumutat pe timp de 140 zile, reprezintă $\frac{7}{120}$ din valoarea capitalului, iar acea adusă de B, dat pe 5 luni, reprezintă $\frac{1}{24}$ din valoarea lui B. Se cere: Procentele cu care au fost împrumutate capitalurile A şi B.

Aceste procente determinate, se presupune că persoana împrumută capitalurile A şi B, cu procentul respectiv găsit pe timp de un an şi jumătate, realizând o dobândă totală de 125500 lei.

Se cere:

1°. Valorile capitalurilor A şi B.

2°. Suprafaţa terenului în h_a, dacă metrul patrat a fost vândut cu 594 lei.

3°. Latura patratului cu aproximaţie 0.001.

$(8\frac{1}{2} - 11\frac{1}{2}$, 18 Octombrie 1932).

BIBLIOGRAFIE

1. *Dr. Ing. Godofredo Garcia.* La mécanica clásica y la explicación. Este o lucrare importantă, are 79 pagini. Cuprinde: Importanţa Analizei vectoriale şi a Geometriei diferenţiale pentru deducerea ecuaţiunilor fundamentale ale Mecanicei. Corecţiunile periheliilor planetare. Deviarea raselor luminoase într'un câmp gravitaţional punctual.

Interpretarea calitativă a metricei relativiste. Echivalenţă mecanică. Natura metrică a continuului.

2. *N. Botea.* Sur la généralisation d'un théorème de lord *Kelvin.*

3. *Căpitan Nestorescu Valerian şi Căpitan Negoescu Ştefan. Algebra elementară şi superioară teoretică şi aplicată.* Este un volum de 486 de pagini scos pe hârtie velină, cu foarte mare îngrijire şi este caracterizat prin claritate, preciziune, uşurinţa de a fi înţeles şi prin figurile sale numeroase precis şi estetic trasate, unele chiar în diferite culori.

La fiecare moment se vede grija autorilor de a arăta aplicaţiile numeroase ale cunoştinţelor teoretice, în diferitele ramuri ştiinţifice şi technice. Cartea începe cu câteva noţiuni rezumative de trigonometrie, apoi cuprinde:

I. *Algebra elementară.* Calculul algebric, ecuaţii, inegalităţi, sisteme de ecuaţii, progresiuni şi logaritmi.

II. *Algebra superioară.* Aranjamente, permutări, combinări, permutări cu repetiţie, dezvoltarea binomului, regula lui *Newton*, probabilităţi, principii. Determinanţi, dezvoltarea lor şi aplicaţii. Expresiuni imaginare. Principii asupra limitelor. Teoria seriilor. Clasificarea, continuitatea şi derivarea funcţiunilor, reprezentarea lor grafică. Funcţiuni de mai multe variabile. Legătura între Algebră şi Analiză. Aplicaţiuni ale teoriei funcţiunilor, dezvoltarea lor în serie. Limită, regula lui *Hôpital.* Descompunerea fracţiilor raţionale

4. *Căpitan Nestorescu Valerian. Nomografie artileristică. Calcul grafic.* Acest volum care are 193 pagini prezintă aceleaşi calităţi ca şi volumul de mai sus.

PROBLEME REZOLVATE

150. — *Fie* A B C *un triunghiu oarecare,* H_a, H_b, H_c *picioarele înălţimelor relative la* B C, C A, A B. *Se ia pe* B C *un punct* D *astfel ca să avem :*

$$\overline{B H_c^2} = \overline{B H_a} \times \overline{B D}$$

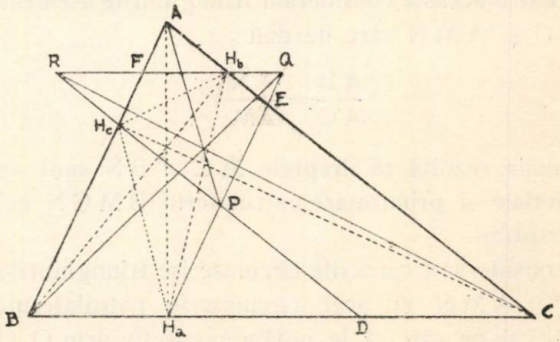
In mod analog obţinem punctele E *şi* F *respectiv pe* A C *şi* A B.

Fie P, R, S *intersecţiile,* (H_c D, H_a E), (H_c D, H_b F), (H_a E, H_b F).

Să se arate că dreptele A P, B S, C R *sunt concurente.*

ALEXANDRU NICULESCU

Punctul D se află la intersecţia cu B C a paralelei dusă din H_c la A C. In adevăr, triunghiurile B H_c H_a şi B H_c D sunt asemenea, având unghiul B comun şi $\sphericalangle B H_c H_a = \sphericalangle B D H_c$, ambele fiind egale cu $\sphericalangle C$; astfel $\sphericalangle B H_c H_a = \sphericalangle C$, fiindcă patrulaterul B H_c H_a C este inscriptibil şi $\sphericalangle B D H_c = \sphericalangle C$ ca corespondente, formate de



paralele H_c D, A C tăiate de dreapta B C. Din asemănarea acestor triunghiuri B H_c H_a şi B H_c D, rezultă :

$$\frac{\overline{B H_c}}{\overline{B H_a}} = \frac{\overline{B D}}{\overline{B H_c}},$$

de unde :

$$\overline{B H_c^2} = \overline{B H_a} \times \overline{B D}$$

Astfel e stabilit că punctul D de pe BC, care satisface condiția din enunț, este la intersecția cu BC a paralelei la AC dusă prin H_c. Analog, rezultă că punctul E este la intersecția cu AC a paralelei dusă la AB prin H_a și punctul F este la intersecția cu AB a paralelei dusă la BC prin H_b.

Rezultă de aci că PQR format prin intersecțiile dreptelor,

$$(H_c D, H_a E), (H_c D, H_b F), (H_a E, H_b F)$$

și triunghiul ABC sunt omotetice și atunci se știe că dreptele ce unesc vârfurile corespunzătoare sunt concurente, astfel dreptele AP, BS, CR sunt concurente.

Observare. Punctul D s'ar putea obține încă, ducând un cerc tangent laturei AB în H_c și care să treacă prin H_a.

Acest cerc va tăie pe BC în H_a și D.

Analog se obțin punctele E și F.

Soluții date de d-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *Bobârnac C. Mircea, Coșereanu Ion* (Piatra-N), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (Galați), *Grofșoreanu I. Gh.* (Arad) *Lupescu Ch. C.* (student), *Mihăileanu N. N.* (Constanța), *Popovici Gh. A. C.* (Iași), *Popovici Tiberiu* (Arad), *Rădulet B. Remus și Vasiliu C. Ion.*

Generalizare. D-nii: *Berdan C., Rădulet Remus* și *Vasiliu Ion,* au generalizat problema în felul următor.

Prin punctele C_1, A_1, B, *oarecare de pe laturile* AB, BC, CA *ale triunghiului* ABC *se duc antiparalele respectiv la* CA, AB, BC, *care taie pe* BC, CA, AB *respectiv în* C_2, A_2, B_2. *Se ia pe* BC *un punct* D *astfel ca să avem:*

$$\overline{BC_1}^2 = \overline{BC_2} \times \overline{BD}$$

In mod analog obținem punctele E *și* F *respectiv pe* AC *și* AB. *Fie* P, R, S *intersecțiile dreptelor ce trec prin punctele* $(C_1 D, A_1 E), (C_1 D, B_1 F), (A_1 E, B_1 F)$. *Să se arate că dreptele* AP, BS, CR *sunt concurente.*

1087. — *Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relația.*

$$\frac{b}{ac}\cot^2 B + \frac{c}{ab}\cot^2 C = \frac{a}{bc} - \frac{\cot A \cot B \cot C}{R}$$

ROMEO N. DUMITRASCU

Insemnând cu E primul membru al relației din enunț, și ținând seamă de relațile cunoscute:

$$a = 2R \sin A, \quad \cot B = \frac{\cos B}{\sin B}$$

și analoagele lor, putem scri:

$$(1) \qquad E = \frac{2R \sin B \cos^2 B}{4R^2 \sin A \sin C \sin^2 B} + \frac{2R \sin C \cos^2 C}{4R^2 \sin A \sin B \sin^2 C} = \frac{\cos^2 B + \cos^2 C}{2R \sin A \sin B \sin C}$$

Dar din relația cunoscută:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$$

(Culegere de Probleme, Cap. XVII, 4), deducem:

$$\cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \cos^2 A - 2 \cos A \cos B \cos C =$$

$$\sin^2 A - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Atunci relația (1) se mai poate scri:

$$E = \frac{\sin^2 A}{2R \sin A \sin B \sin C} - \frac{2 \cos A \cos B \cos C}{2R \sin A \sin B \sin C} =$$

$$\frac{\sin A}{2R \sin B \sin C} - \frac{\cot A \cot B \cot C}{R} =$$

$$\frac{2R \sin A}{2R \sin B \cdot 2R \sin C} - \frac{\cot A \cot B \cot C}{R} =$$

$$\frac{a}{bc} - \frac{\cot A \cot B \cot C}{R}$$

Avem astfel stabilită relația dată.

Soluții date de d-rele: *Hortopan Ana* (studentă, Cluj), *Otel Tatiana* (studentă, Cluj), și de d-nii: *Coandă Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Fofiu Cornel* (Șc. Polit., Timișoara), *Ghiocel V. Vasile* (ltc., Giurgiu), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Latea P. C-tin* (Șc. Milit. de Artilerie), *Margulius Marius* (București), *Mereuță Emilian* (student, București), *Motoc D. Mircea* (Oltenița), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București), *Popa Gh. Ioan* (București), *Popescu C. Ștefan* (lic. Milit., Craiova), *Stoica Ioan* (Sub.-Lt) și *Triscă S. Ioan* (Constanța).

1088. — *Să se afle patratul perfect de cinci cifre, astfel ca numărul format de primele două cifre să fie răsturnatul numărului format de ultimele două cifre, iar cifra de mijloc, care este egală cu suma cifrelor rădăcinei, să fie divizor al sumei cifrelor patralului.*

VALERIU A. NOVACU

Conform enunţului numărul cerut este de forma; $\overline{abcba}$. Cum ultimele două cifre ale unui patrat perfect 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96, rezultă că patratul cerut se găseste printre numerile:

$10\,c\,01$, $40\,c\,04$, $90\,c\,09$, $61\,c\,16$, $12\,c\,21$, $42\,c\,24$, $52\,c\,25$, $92\,c\,29$, $63\,c\,36$, $14\,c\,41$, $44\,c\,44$, $94\,c\,49$, $65\,c\,56$, $16\,c\,61$, $46\,c\,64$, $96\,c\,69$, $67\,c\,76$, $18\,c\,81$, $48\,c\,84$, $98\,c\,89$, $69\,c\,96$.

Ţinând seamă că c este divizorul sumei cifrelor patratului cerut, observăm, că:

In primul număr c poate fi 2 şi cum $10201 = 101^2$, c este şi suma cifrelor rădăcinei lui patrate, rezultă astfel că 10201 este o soluţie a problemei.

In al 2-lea număr, c poate fi 2, 4 sau 8, dar numerile, 40204, 40404, 40804 nu satisfac în întregime enunţul.

In al 3-lea număr c poate fi 2 sau 9, dar numerile 90209, 90909 nu satisfac în întregime enunţul.

In al 4-lea număr, c poate fi 2 sau 7, dar numerile 61216, 61716, nu satisfac în întregime enunţul.

In al 5-lea număr, c poate fi 2 sau 3, şi numărul 12221 nu satisface în întregime enunţul, pe când numărul $12321 = 111^2$, şi c este suma cifrelor rădăcinei lui patrate, deci 12321 este o soluţie a problemei. Continuând în acelaşi mod cu celelalte numere din şirul de mai sus, nu mai găsim nici o soluţie a problemei. Singurile soluţii sunt deci patratele, $10201 = 101^2$ şi $12321 = 111^2$.

Soluţii date de dnii: *Băleanu D-tru* (lic. Milit., Mrea Dealu), *Coandă I. Virgil* (lic Milit, Craiova), *Cojocaru M. Mihail* (lic. Milit., Craiova), *Dan T. Traian* (Şc. Polit. Timişoara), *Denis C-tin* (lic. Roman), *Fofiu Corneliu* (Şc Polit. Timişoara), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Margulius Marius* (Bucureşti), *Maxilu Panaite* (lic. Internat, Iaşi), *Milea G. E.* (Sub-Lt.) *Popescu Adrian*, *Predoescu I. M.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Racoţeanu Ion* (lic. Milit., Craiova), *Rezeanu P. Marin*, *Theodoriadi Lucian* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti) şi *Triscă S. I.* (Constanţa).

1089. — *Suma termenilor unei progresiuni aritmetice fără ultimul termen este* 231; *suma fără primul termen este 275; iar suma fără primii doi şi ultimii doi termeni este* 184. *Se cere progresiunea.*

I. DUMITRIU-DADA

Fie a primul termen al progresiunii, l ultimul termen, r raţia, n numărul termenilor şi s suma lor.

Conform enunţului avem:

$$\begin{cases} s - l = 231 \\ s - a = 275 \\ s - a - (a + r) - l - (l - r) = 184 \end{cases}$$

Avem astfel un sistem de trei ecuaţii, cu trei necunoscute care trebueşte rezolvat,

Acest sistem se mai poate scri:

$$(1) \qquad \begin{cases} s - l = 231 \\ s - a = 275 \\ s - 2a - 2l = 184 \end{cases}$$

Scăzând ultima ecuaţie pe rând din prima şi a doua, obţinem:

$$\begin{cases} 2a + l = 47 \\ a + 2l = 91 \end{cases}$$

Scăzând a 2-a ecuaţie din prima înmulţită cu 2, avem:

$$3a = 3,$$

deci:

$$a = 1,$$

şi evident:

$$l = 45$$

Dacă înlocuim în ecuaţia 2-a din (1) valoarea lui a, găsim:

$$s = 276$$

Am aflat astfel până acum:

$$(2) \qquad a = 1, \quad l = 45, \quad s = 276$$

Trebuie să mai calculăm raţia şi numărul termenilor.

Pentru aceasta, folosim relaţiile cunoscute:

$$\begin{cases} l = a + (n - 1)\,r \\ s = \dfrac{(a + l)\,n}{2} \end{cases}$$

Dacă aci întroduducem valorile date în (2), găsim:

$$(3) \qquad \begin{cases} 45 = 1 + (n - 1)\,r \\ 276 = \dfrac{(1 + 45)\,n}{2} \end{cases}$$

Din a 2-a relaţie, deducem uşor

$$n = 12,$$

care întrodusă în prima relaţie din (3), ne dă:

$$r = 4$$

Progresiunea aritmetică căutată este astfel:

$$\div 1 . 5 . 9 . 13 . 17 . 21 . 25 . 29 . 33 . 37 . 41 . 45 .$$

Soluţii date de d-şrele: *Naneş Cornelia* (Şc. Centrală, Bucureşti), *Leibovitz Gizela* (lic. Beiuş) şi de d-nii: *Apostol Gh. Valerian* (lic. Milit. Cernăuţi), *Arhire D. Vasile* (lic. Milit., Cernăuţi), *Băleanu D-tru* (lic.. Mrea Dealu), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru Marin, Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Dan T. Traian* (Şc. Polit., Timişoara), *Fofiu Cornel* (Şc. Polit., Timişoara), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Gheorghiu Alexandru* (lic Milit, Tg.-Mureş), *Ghiocel V. Vasile* (lic., Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Lupescu Gh. C.* (student), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Maşcaş Petru* (lic., Beiuş), *Mazilu Panaite* (lic. Internat, Iaşi), *Mehedinţi D. D-tru* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăilă Nicolae* (lic. Milit.. Cernăuţi), *Milea G. E.* (Sub.-Lt.), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Nicoară D. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Pănoiu Emanoil* (lic. Carol, Craiova), *Pănescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Petrescu D. C-tin* (Craiova), *Popa D. Traian* (lic, Giurgiu), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Porumbescu D.* (Tg.-Ocna), *Predoescu D. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Racoţeanu Ion* (lic. Milit., Craiova), *Rezeanu P. Marin, Savovici Florentin* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Şerbu D. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Stoica G. Ion* (Sub -Lt.), *Süli Mihai* (Şc. Polit., Timişoara), *Tica Petre Marin* (Sub.-Lt. de Artilerie), *Trică S. Ioan* (Constanţa), *Vasiliu I. Mircea* (lic. Milit., Cernăuţi) şi *Verenca Em. Silviu* (lic. Milit., Cernăuţi).

1090. — *Să se stabilească identităţile:*

$$(x-1)(y-1)(z-1)+\Sigma(x-1)(y+1)(z+1)=4(xyz-1)$$

$$(x+1)(y+1)(z+1)+\Sigma(x+1)(y-1)(z-1)=4(xyz+1)$$

CEZAR COSNITA

Notând cu E primul membru al primei identităţii, observăm că:

$$(x-1)(y-1)(z-1)=xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1$$

$$(x-1)(y+1)(z+1)=xyz+xy-yz+zx+x-y-z-1$$

$$(x+1)(y-1)(z+1)=xyz+xy+yz-zx-x+y-z-1$$

$$(x+1)(y+1)(z-1)=xyz-xy+yz+zx-x-y+z-1$$

Adunând aceste egalităţi şi simplificând, avem:

$$E=4(xyz-1)$$

Prima identitate este astfel stabilită:

Notăm acum cu E_1 primul membru al celei de a 2-a identităţi şi observăm că:

$$(x+1)(y+1)(z+1)=xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$$

$$(x+1)(y-1)(z-1)=xyz-xy+yz-zx+x-y-z+1$$

$$(x-1)(y+1)(z-1)=xyz-xy-yz+zx-x+y-z+1$$

$$(x-1)(y-1)(z+1)=xyz+xy-yz-zx-x-y+z+1$$

Adunând aceste egalităţi şi simplificând, găsim:

$$E_1=4(xyz+1)$$

Avem astfel stabilită şi a 2-a identitate.

Soluţii date de d-nii: *Apostol Gh. Valeriu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Curchi Ioan* (student Bucureşti), *Dan T. Traian* (Şc. Polit., Timişoara), *Fofiu Cornel* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghiocel V. Vasile* (lic., Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ivănescu Cezar* (lic, Bârlad), *Lupescu Gh. C-tin* Roman), *Maşcaş Petru* (lic. Beiuş), *Mereuţă Emilian* (student), *Milea G. Ene* (Sub.-Lt), *Nicoară D. Constantin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Patraulea N. R.* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Petrescu D. C-tin* (Craiova), *Popa Gh. Ioan* (Oltenita), *Popa D. Traian* (lic. Giurgiu), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Predoescu I. M.* (iic. Buzeşti, Craiova), *Rezeanu P. Marin, Savovici Florentin* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Soare I. Ilie* (lic. Tg.-Mureş), *Theodoriadi Lucian* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Tica Petre Marian* (Sub.-Lt., Călăraşi), *Trică S. Ioan* (Constanţa) şi *Vasiliu Mircea* (lic. Milit., Cernăuţi).

Soluţia 2-a dată de autor şi de d-l *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti).

Plecăm de la identităţile trigonometrice cunoscute:

$$\sin(a+b+c)=\Sigma\sin a\cos b\cos c-\sin a\sin b\sin c$$

$$\cos(a+b+c)=\cos a\cos b\cos c-\Sigma\sin a\sin b\sin c$$

şi folosim metoda din articolul „*O clasă de identităţi algebrice*", „R. M. T." vol. II, 1922, adică ţinem seamă de formulele lui *Euler:*

$$\cos at=\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2},$$

$$\sin at=\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2}, \qquad (i=\sqrt{-1})$$

şi operăm transformarea:

$$e^{a\,i} = x, \quad e^{b\,i} = y, \quad e^{c\,i} = z,$$

în virtutea căreia, identităţile trigonometrice de mai sus devin:

$$\frac{1}{2i}\left(x\,y\,z - \frac{1}{x\,y\,z}\right) = \frac{1}{8i}\sum\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{8i}\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(y - \frac{1}{y}\right)\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(x\,y\,z + \frac{1}{x\,y\,z}\right) = \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{8}\sum\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(y - \frac{1}{y}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Aducând la forma întreagă şi înlocuind x^2, y^2, z^2 prin x, y, z, avem:

$$4\,(x\,y\,z - 1) = \Sigma\,(x-1)\,(y+1)\,(z+1) + (x-1)\,(y-1)\,(z-1)$$

$$4\,(x\,y\,z + 1) = (x+1)\,(y+1)\,(z+1) + \Sigma\,(x-1)\,(y-1)\,(z+1),$$

care evident sunt tocmai identităţile date.

Observare. Dl *Margulius Marius,* observă chiar că prima identitate se găseste stabilită în articolul menţionat din „R. M. T." Vol. II, pag. 4.

Soluţia 3-a dată de dnii: *Laţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie) şi *Motoc D. Mircea* (Oltenita). Se desvoltă în două moduri deosebite determinanţii:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (x-1) & -(x+1) & -(x+1) \\ (y+1) & (y-1) & (y+1) \\ (z+1) & -(z+1) & (z-1) \end{vmatrix}$$

şi

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (x+1) & -(x-1) & -(x-1) \\ (y-1) & (y+1) & (y-1) \\ (z-1) & -(z-1) & (z+1) \end{vmatrix}$$

şi se găsesc astfel identităţile cerute.

PROBLEME PROPUSE

1145. — Trouver un carré parfait de huit chiffres tel que la somme des deux nombres formés par ses deux tranches de quatre chiffres soit un nombre composé de chiffres égaux.

V. THÉBAULT

1146. — Să se găsească relaţia de legătură între un număr, câturile şi resturile rezultate prin împărţirea sa cu cifrele sale.

IOAN C. SCHILERU-DILI

1147. — Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinele ecuaţiei:

$$x^2 + p\,x + q = 0,$$

şi y_1, y_2 sunt rădăcinele ecuaţiei:

$$(q - 2\,p + 4)\,y^2 - (4 - p)\,y + 1 = 0,$$

atunci se cere să se stabilească relaţiunea.

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + y_1 + y_2 = 2$$

V. ALACI

1148. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^3 + 64\,y^3 = 91 \\ x^2 + 16\,y^2 = 25 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

1149. — Dacă prin vârful B, al unui triunghiu A B C, ducem o dreaptă oarecare Δ, iar printr'un punct B′ al laturei opuse, ducem paralele cu celelalte două laturi B C şi B A, respectiv B′ C′ şi B′ A′, obţinem pe dreapta Δ două puncte D_1 şi D_2.

Să se demonstreze că dreptele A D_1 şi C D_2 sunt paralele.

OVIDIU ŢINO

1150. — Se construeşte dreptunghiul B B_a C_a C a cărui latură $B_a C_a$ trece prin vârful A al triunghiului A B C. Să se demonstreze că acest dreptunghiu este echivalent cu fiecare din dreptunghiurile A B_c A_c B, C C_b A_b A construite în mod analog.

COL. GH. BUICLIU

1151. — Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu A B C, să se stabilească relaţia:

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (4\,R + r)^2 - 2\,p^2$$

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

1152. — Să se arate că:

$$\frac{h_a\,h_b\,h_c}{(h_c - h_a)\,(h_c - h_b)\,(h_b - h_a)} = \frac{\sin A \sin B \sin C)}{(\sin A - \sin B)\,(\sin A - \sin C)\,(\sin B - \sin C)}$$

unde A, B, C şi h_a, h_b, h_c sunt unghiurile şi înălţimele unui triunghiu A B C.

ION MARGINEANU

ŞCOALA POLITECHNICĂ TIMIŞOARA
CANDIDAŢII REUŞIŢI LA EXAMENUL DE ADMITERE ÎN PREPARATOR
(ANUL ŞCOLAR 1932—1933)

1. *Mircea I. Florian* (lic. T.-Măgurele).
2. *Manolescu I. Eugeniu* (lic. Focşani).
3. *Vasilescu I. Mircea* (lic. Oradea).
4. *Curveanu V. Constantin* (lic. T.-Severin).
5. *Fofiu T. Corneliu* (lic. Beiuş).
6. *Peştianu A. Ioan* (lic. T.-Severin).
7. *Petrovici I. Gheorghe* (Semin. Pedag. Iaşi).
8. *Tigoianu M. Mircea* (lic. Mihaiu Viteazul Bucureşti).
9. *Tomov Gh. Gheorghe* (lic. Bolgrad).
10. *Cocârlă M. Serghii* (lic. Chişinău).
11. *Dan T. Traian* (lic. Beiuş).
12. *Ionescu A. Mihail* (lic. Silistra).
13. *Zingher Ch. Gustav* (lic. Chişinău).
14. *Duma I. Şerban* (lic. Petroşani).
15. *Hircze F. Atilla Francisc* (lic. Lugoj).
16. *Păun V. Nicolae* (lic. Mateiu Basarab Bucureşti).
17. *Marandici C. Nicolae* (llc. Chişinău).
18. *Trunov I. Anatolii* (lic, Chişinău).
19. *Curuleac M. Dimitrie* (lic. Cernăuţi).
20. *Motelică S. Lev* (lic. Chişinău).
21. *Zottu V. Vasile* (lic. Gheorghe Lazăr Bucureşti).
22. *Custură Gh. Gheorghe* (lic Brăila).
23. *Mitran I. Petre* (lic. Slatina-Olt).
24. *Coşocariu St. Radu* (lic. Tulcea).
25. *Dimitriu Gh. Mircea* (lic. Tg.-Mureş).
26. *Iasinsky I. Mircea* (lic. Turda).
27. *Trinchin R. Nicolae* (lic. Chişinău).
28. *Chivulescu Gr. Grigore* (lic. Braşov).
29. *Coştiu Gr. Ioan* (lic. Tecuci).
30. *Frangopol C. Jean* (lic. Constanţa).
31. *Săndulescu I. Ioan* (lic. Craiova).
32. *Balaban P. Gheorghe* (lic. Focşani).
33. *Ivanov N. Gheorghe* (lic. Chişinău).
34. *Lupeanu D. Valentin* (lic. Brăila).
35. *Crupoveaţchin E. Nicolae* (lic. Bălţi).
36. *Davidescu M. Romeo* (lic. Mihail Eminescu Bucureşti).
37. *Fogel B. Bela* (lic. Satu-Mare).
38. *Olaru I. Vasile* (lic Internat Iaşi).
39. *Stoianov D. Vasile* (lic. Tighina).
40. *Micula V. Mircea* (lic. Timişoara).
41. *Popa M. Constantin* (lic. Turnu-Severin).
42. *Popescu N. Maria* (lic. Craiova).
43. *Popovici L. Mihaiu* (lic. Internat Iaşi).
44. *Suciu A. Veturia-Maria* (lic. Sibiu).
45. *Sterie M. Anastase* (lic. Constanţa).
46. *Forgaci I. Radu* (lic. Câmpulung).
47. *Giurgeca I. Liviu* (lic. Timişoara).
48. *Herrling C. Tiberiu* (lic, Timişoara).
49. *Neaga D. Igori* (lic. Chişinău).
50. *Baltă S. Emil* (lic. Brăila).
51. *Bălţăneanu M. Vintilă* (lic Turnu-Severin).
52. *Dîrlea P. Leandru* (lic. Arad).
53. *Klipp I. Iosif* (lic. Sibiu).
54. *Munteanu N. Viorel* (lic. Timişoara).
55. *Surdu V. Bujor* (lic. Lugoj).
56. *Gârneţ I. Teodor* (lic. Huşi).
57. *Popov M. Nicolae* (lic. Comrat).
58. *Rafael St. Alexandru* (lic. Chişinău).
59. *Vicaş V. Marius* (lic. Simleul-Silvaniei).
60. *Botez I. Radu* (lic. Piatra-Neamţ).
61. *Ciupercă St. Nicolae* (lic. Râmnicu-Sărat).
62. *Roşiu P. Iosif* (lic. Alba-Iulia).
63. *Bardocz C. Ştefan* (lic. Turda).
64. *Ghebhardt V. Oto* (lic. Brăila).
65. *Ghencev S. Constantin* (lic. Bolgrad).
66. *Koch G. Gustav* (lic Sibiu).
67. *Lazari S. Mihail* (lic. Chişinău).
68. *Mănescu I. Vasile* (lic. Turnu-Severin).
69. *Silion Gh. Gheorghe* (lic. Câmpina).
70. *Necrelescu N. Eugen* (lic. Cluj)
71. *Tebeica D. Constantin* (lic Brăila).
72. *Gilorteanu P. Nicolae* (lic. Braşov).
73. *Pungă T. Ştefan* (lic Timişoara).
74. *Skonda G. Edmund* (lic. Timişoara).
75. *Frânghie A. Traian* (lic. Bistriţa).
76. *Şandru-Alboi V. Alexandru* (lic. Câmpulung).
77. *Szabo A. Nicolae* (lic. Lugoj).
78. *Tismănariu I. Ioan* (lic. Timişoara).
79. *Belciu I. Dumitru* (lic. Brăila).
80. *Kiss A. Ştefan* (lic. Timişoara).
81. *Lerner A. Gustav* (lic. Alba-Iulia).
82. *Mihali V. Dragoş* (lic. Câmpulung).
83. *Zavaţchi F. Ştefan* (lic. Cetatea-Albă).
84. *Báder H. Bela* (lic. Timişoara).
85. *Trăuşan C. Dimitrie* (lic. Orăştie).

Abonamentul pe anul XII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

şi se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Şcoala Politechnică din Timişoara.

ANUL XII. 15 DECEMBRIE 1932 NO 10.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. D. V. IONESCU DESFASURATE SUCCESIVE
2. NOTE MATEMATICE: 24, 25, 26.
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 1091 1094 1095, 1096, 1097, 1111.
5. PROBLEME PROPUSE: 1153-1160
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** —profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare

---

ANUL XII — No. 10. TIMISOARA, 15 DECEMBRIE 1932

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

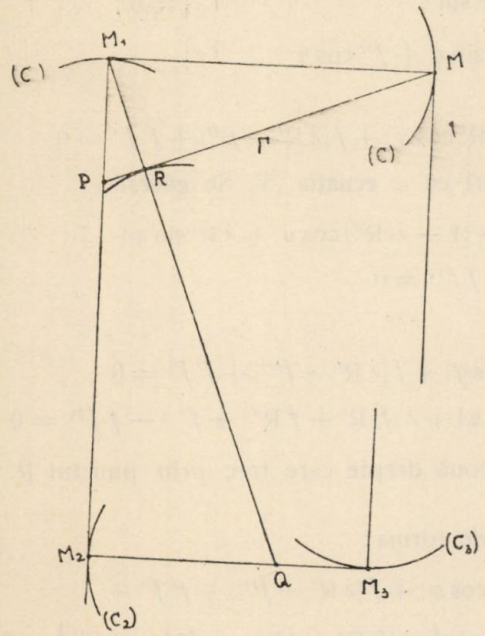
PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

DESFĂȘURATE SUCCESIVE

de D. V. IONESCU
PROFESOR LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE DIN CLUJ

1. Să considerăm o curbă (C). Normalele dealungul ei înfășură o curbă (C_1) numită *desfășurata* curbei (C). Normalele dealungul curbei (C_1) înfășură o curbă (C_2) numită *desfășurata a doua* a curbei (C), ... și așa mai departe.



Fie M un punct oarecare pe curba (C). Normala în M la curba (C) atinge curba (C_1) în punctul M_1, normala în M_1 la curba (C_1) atinge curba (C_2) în punctul M_2, ... și așa mai departe.

Dl. *L. Brande*[1]) a considerat pe dreapta $M_1 M_2$ punctul P care împarte acest segment într'un raport constant și anume:

$$(1) \qquad \frac{P M_2}{M_1 M_2} = \lambda,$$

și a căutat înfășurătoarea dreptei M P. In articolul citat mai sus se dă o construcție a punctului R unde dreapta M P își atinge înfășurătoarea.

In acest articol vreau să arăt că *dreapta* $M_1 R$ *întâlnește pe* $M_2 M_3$ *în punctul Q pentru care avem:*

$$(2) \qquad \frac{Q M_3}{M_2 M_3} = \lambda \cdot \frac{R'^2}{R R''}$$

unde R, R', R'' sunt razele de curbură succesive $M M_1$, $M_1 M_2$, $M_2 M_3$.

In cazul particular când $\lambda = 0$, deducem că *punctul unde dreapta* $M M_2$ *își atinge înfășurătoarea se găsește pe dreapta* $M_1 M_3$.

2. Demonstrația acestor proprietăți se face cu ușurință dacă se reprezintă curba (C) cu ajutorul *ecuației tangențiale:*

$$(3) \qquad x \sin \varphi - y \cos \varphi = f(\varphi)$$

unde φ este unghiul pe care il face tangenta în M la curba (C) cu o axă fixă Ox. Pentru o valoare determinată a lui φ, ecuația (3) reprezintă ecuația tangentei în M la curbă.

Ecuația normalei $M M_1$ se obține derivând ecuația (3) în raport cu parametrul φ.

$$(4) \qquad x \cos \varphi + y \sin \varphi = f'(\varphi)$$

Coordonatele punctului M în funcție φ se obțin, rezolvind ecuațiile (3) și (4) în raport cu x și y. Se găsește:

$$(M) \qquad \begin{aligned} x &= f \sin \varphi + f' \cos \varphi \\ y &= -f \cos \varphi + f' \sin \varphi \end{aligned}$$

La fel se găsesc coordonatele celorlalte puncte M_1, M_2 și M_3 și anume:

$$(M_1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= f' \cos \varphi - f'' \sin \varphi \\ y_1 &= f' \sin \varphi + f'' \cos \varphi \end{aligned}$$

[1]) *L. Brande:* „Sur quelques enveloppes". Nouvelles Annales de Mathématiques. 1913. p. 337.

$$(M_2)\qquad \begin{aligned} x_2 &= -f'' \sin\varphi - f''' \cos\varphi \\ y_2 &= \quad f'' \cos\varphi - f''' \sin\varphi \end{aligned}$$

$$(M_3)\qquad \begin{aligned} x_3 &= -f''' \cos\varphi + f^{IV} \sin\varphi \\ y_3 &= -f''' \sin\varphi - f^{IV} \cos\varphi \end{aligned}$$

Din formulele precedente se vede că:

$$x_1 - x = -(f + f'') \sin\varphi = (f + f'') \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_1 - y = \quad (f + f'') \cos\varphi = (f + f'') \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

de unde se deduce că *raza de curbură* $R = \overline{M M_1}$ este egală cu:

$$R = f + f''$$

La fel se arată că:

$$\overline{M_1 M_2} = R' = f' + f'''$$

$$\overline{M_2 M_3} = R'' = f'' + f^{IV}$$

Coordonatele ξ și η ale punctului P sunt

$$\xi = x_2 - \lambda (x_2 - x_1)$$

$$\eta = y_2 - \lambda (y_2 - y_1)$$

sau:

$$\xi = -f'' \sin\varphi - f''' \cos\varphi + \lambda R' \cos\varphi$$

$$\eta = \quad f'' \cos\varphi - f''' \sin\varphi + \lambda R' \sin\varphi$$

adică:

$$(P)\qquad \begin{aligned} \xi &= (\lambda R' - f''') \cos\varphi - f'' \sin\varphi \\ \eta &= (\lambda R' - f''') \sin\varphi + f'' \cos\varphi \end{aligned}$$

Ecuația dreptei M P este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ f \sin\varphi + f' \cos\varphi & -f \cos\varphi + f' \sin\varphi & 1 \\ (\lambda R' - f''') \cos\varphi - f'' \sin\varphi & (\lambda R' - f''') \sin\varphi + f'' \cos\varphi & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau:

$$(5)\qquad x[-R\cos\varphi + (1-\lambda) R' \sin\varphi] - y\,[R\sin\varphi + (1-\lambda) R' \cos\varphi] + f(\lambda R' - f''') + f' f'' = 0$$

Pentru a găsi înfășurătoarea dreptei M P derivăm în raport cu φ ecuația (5). Se găsește:

$$(6)\qquad \begin{aligned} x[(R + (1-\lambda) R'') \sin\varphi - \lambda R' \cos\varphi] - y\,[(R + (1-\lambda) R'') \cos\varphi + \lambda R' \sin\varphi] \\ + \lambda (f' R' + f R'') + f''^2 - f f^{IV} = 0 \end{aligned}$$

Ecuațiile (5) și (6) se mai scriu:

$$(5')\qquad -R(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + (1-\lambda) R'(x\sin\varphi - y\cos\varphi) + f(\lambda R' - f''') + f' f'' = 0$$

$$(6')\qquad (R + (1-\lambda) R'')(x\sin\varphi - y\cos\varphi) - \lambda R'(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + \lambda (f' R' + f R'') + f''^2 - f f^{IV} = 0$$

Ecuațiile (5') și (6') unde privim pe x și y variabili sunt două drepte care trec prin punctul R unde dreapta M P își atinge înfășurătoarea.

Ecuația unei drepte arbitrare care trece prin R este deci de forma:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &-R(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + (1-\lambda) R'(x\sin\varphi - y\cos\varphi) + f(\lambda R' - f''') + f' f'' + \\ &k\{(R + (1-\lambda) R'')(x\sin\varphi - y\cos\varphi) - \lambda R'(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + \lambda (f' R' + f R'') + f''^2 - f f^{IV}\} = 0, \end{aligned}$$

unde k este un parametru arbitrar.

Să determinăm pe k astfel ca dreapta precedentă să treacă prin punctul M_1. Știm că pentru puntul M_1 avem:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = f'$$

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = f''$$

Inlocuind în ecuația precedentă vom avea:

$$\begin{aligned} &-R f' - (1-\lambda) R' f'' + f(\lambda R' - f''') + f' f'' + \\ &k\{-f''(R + (1-\lambda) R'') - \lambda f' R' + \lambda (f' R' + f R'') + f''^2 - f f^{IV}\} = 0 \end{aligned}$$

Insă :

$$-Rf' - (1-\lambda)R'f'' + f(\lambda R' - f''') + f'f'' = -(1-\lambda)RR'$$

$$-f''(R + (1-\lambda)R'') - \lambda f'\lambda' + \lambda(f'R' + fR'') + f''^2 - ff^{IV} = -(1-\lambda)RR''$$

Ecuaţia precedentă care determină pe k este deci :

$$+(1-\lambda)R[R' + kR''] = 0,$$

de unde rezultă că vom lua :

$$k = -\frac{R'}{R''}$$

Inlocuind pe k cu această valoare în ecuaţia (7), deducem că ecuaţia dreptei M R este :

$$R''\left\{-R(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + (1-\lambda)R'(x\sin\varphi - y\cos\varphi) + f(\lambda R' - f''') + f'f''\right\} -$$

$$R'\Big\}(R + (1-\lambda)R'')(x\sin\varphi - y\cos\varphi) - \lambda R'(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + \lambda(f'R' + fR'') + f''^2 - ff^{IV}\Big\} = 6$$

sau :

(8) $$(\lambda R'^2 - RR'')(x\cos\varphi + y\sin\varphi) - RR'(x\sin\varphi - y\cos\varphi) + R(f'R'' - R'f'') - \lambda f'R'^2 = 0.$$

Pentru a scrie această ultimă ecuaţie ne-am servit de faptul că :

$$-ff'''R'' + f'f''R'' - R'(f''^2 - ff^{IV}) = R(f'R'' - R'f'')$$

Să întersectăm acum dreapta M_1R reprezentată de ecuaţia (8) cu dreapta M_2M_3, a cărei ecuaţie este :

(9) $$-x\cos\varphi - y\sin\varphi = f'''$$

şi fie Q punctul de întersecţie.

Ţinând seama de ecuaţia (9), ecuaţia (8) se mai scrie :

$$-(\lambda R'^2 - RR'')f''' - RR'(x\sin\varphi - y\cos\varphi) +$$
$$R(f'R'' - R'f'') - \lambda f'R'^2 = 0,$$

sau :

$$-RR'(x\sin\varphi - y\cos\varphi) - \lambda R'^3 +$$
$$R(R''R' - R'f'') = 0,$$

şi suprimând factorul $-R'$, deducem :

$$R(x\sin\varphi - y\cos\varphi) + \lambda R'^2 - R(R'' - f'') = 0$$

adică :

(10) $$x\sin\varphi - y\cos\varphi = f^{IV} - \lambda\frac{R'^2}{R}$$

Rezolvind sistemul de ecuaţii (9) şi (10) deducem coordonatele lui Q, adică :

(Q)
$$x = f^{IV}\sin\varphi - f'''\cos\varphi - \lambda\frac{R'^2}{R}\sin\varphi$$
$$y = -f^{IV}\cos\varphi - f'''\sin\varphi + \lambda\frac{R'^2}{R}\cos\varphi$$

Insă am văzut că coordonatele lui M_3 sunt :

$$x_3 = f^{IV}\sin\varphi - f'''\cos\varphi$$
$$y_3 = -f^{IV}\cos\varphi - f'''\sin\varphi$$

şi observăm că :

$$x_3 - x_2 = R''\sin\varphi$$
$$y_3 - y_2 = -R''\cos\varphi,$$

Aşa că formulele precedente ne arată că coordonatele lui Q se mai scriu :

(11)
$$x = x_3 - \lambda\frac{R'^2}{RR''}(x_3 - x_2)$$
$$y = y_3 - \lambda\frac{R'^2}{RR''}(y_3 - y_2),$$

ceace arată că raportul :

$$\frac{QM_3}{M_2M_3} = \lambda\cdot\frac{R'^2}{RR''}$$

ceace era de demonstrat.

3. In particular calculul precedent arată că în cazul când $\lambda = 0$, avem :

$$x = x_3$$
$$y = y_3$$

punctul Q coincide cu M_3 şi prin urmare *punctul unde dreapta* MM_2 *îşi atinge înfăşurătoarea se găseşte pe dreapta* M_1M_3. [1]

[1]) Pentru alte proprietăţi ale desfăşuratelor succesive a se consulta. *L. Brande:* „Les coordonnées intrinsèques". Scientia 1914. Gauthier Villars. Paris.

NOTE MATEMATICE

24. — *Semnele ridicării la putere şi a extragerii de rădăcină.*

Ridicarea la putere. Notaţiile actuale pentru a indica puterile unui număr sau a unei expresii algebrice datează dela *Descartes* (1637). Până la el s'au întrebuinţat multe alte semne. Matematicianul francez *P. Hérigone* scrie în cartea lui „Cursus Mathematicus“ (1634—1637: $a\,2$, $a\,3$, $a\,4$ în loc de a^2, a^3, a^4, iar *Albert Girard* (1629) scrie $5\,(2)$ în loc de $5\,x^2$. Dar nu numai exponenţii întregi şi pozitivi au fost cunoscuţi. *Nicole Oresme* (circa 1323—1382) întrebuinţa notaţia: $\frac{1}{2}\,2^p$ în loc de $2^{\frac{1}{2}}$ şi $\boxed{1^p\,\frac{1}{2}}\,4$ în loc de $4^{1\frac{1}{2}}$ *Chuquet* (1484) scrie 12^1 în loc de $12\,x$, 12^2 în loc de $12\,x^2$ etc; tot el scrie $9^3\,\bar{m}$, în loc de $9\,x^{-3}$, ceeace arată că cunoştea exponenţii negativi (un lucru care n'a fost înţeles decât cu două secole mai târziu). Acelaş *Albert Girard* însemna $\sqrt[6]{2000}$ cu $\left(\frac{1}{6}\right)2000$ şi $49^{\frac{3}{2}}$ cu $\left(\frac{3}{2}\right)49$ Insă, abia *Wallis* (1655) defineşte complect exponenţii negativi şi fracţionari, stabilind relaţiile generale, ca: $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$, $x^{\frac{1}{9}}=\sqrt[9]{x}$, $x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$. *Newton*, cu marea lui autoritate, a contribuit mult la răspândirea generală a acestor exponenţi.

Pentru a arăta evoluţia diferitelor semne întrebuinţate în scrierea ecuaţiilor algebrice (unde vom vedea diferite notaţii pentru câtimea necunoscută şi puterile ei) dealungul a două secole, anume, dela prima carte tipărită cu conţinut algebric (1494, *Luca Pacioli*: Suma de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalitá“) până la *Wallis* (1693, „Arithmetica Infinitorum“, voi transcri din cartea lui *D. E. Smith* („History of Mathematics“, vol. II, pag. 427—428, 430—431) o serie de exemple interesante:

Pacioli (1494): „Trouame ·1· nº che gīōto al suo q̄dratº facia ·12“. (Adică: $x+x^2=12$.)

Van der Hoeche (1514): 4 Se. — 51 Pri. — 30 N. dit is ghelijc $45\frac{3}{5}$. (Adică: $4\,x^2-51\,x-30=45\,\frac{3}{5}$)

Ghaligai (1521): $1\square\,e\,32\,c^0-320$ numeri. (Adică: $x^2+32\,x=320$).

Cardan (1545): cub^9 p : 6 reb^9 aeq̄lis 20. (Adică: $x^3+6\,x=20$).

Scheubel (1551): 4 sex. aequantur 108 ter (Adică: $4\,x^7=108\,x^4$).

Tartaglia (1556): „Trouame uno numero che azontoli la sua radice cuba uenghi ste, cioe. 6.“ (Adică: $x+\sqrt[3]{x}=6$).

Buteo (1559): $1\diamondsuit\,P\,6\,\varrho\,P\,9\,\llcorner\,1\diamondsuit\,P\,3\,\varrho\,P\,24$. (Adică: $x^2+6\,x+9=x^2+3\,x+24$).

Bombelli (1572): $\frac{6}{1}\,.\,p\,.\,\frac{3}{8}$. Eguale a 20. (Adică: $x^6+8\,x^3=20$). Sau: $1\underset{\frown}{6}\,p.\,8\underset{\frown}{3}$ eguale a 20 (aceeaşi ecuaţie).

Gosselin (1577): 12 L M 1 Q P 48 aegualia 144 M 24 L P 2 Q. (Adică: $12\,x-x^2+48=144-24\,x+2\,x^2$).

Stevin (1585): $3\,(\underline{2})+4$ egales à $2\,(\underline{1})+4$. (Adică: $3\,x^2+4=2\,x+4$).

Ramus şi Schoner (1586): 1 q $\overset{1}{\underset{1}{-\!\!+}}$ 8 *l* a equatus sit 65. (Adică: $x^2+8\,x=65$).

Vieta (c. 1590): 1 Q C—15 Q Q+85 C — 225 Q+274 N, aequatur 120. (Adică: $x^6-15\,x^4+85\,x^3-225\,x^2+274\,x=120$).

Girard (1629): $1\,(4)+35(2)+24=10\,(3)+50(1)$. (Adică: $x^4+35\,x^2+24=10\,x^3+50\,x$).

Oughtred (1631): $\frac{1}{2}\,Z\pm\sqrt{_q}:\frac{1}{4}\,Z_q-A\,E=A$. (Adică: $\frac{1}{2}\,Z\pm\sqrt{\frac{1}{4}\,Z^2-A\,E}=A$).

Harriot (1631): $aaa-3\,.\,bba=\!=+2\,.\,ccc$. (Adică: $x^3-3\,b^2\,x=2\,c^3$).

Hérigone (1634): $154\,a\backsim 71\,a\,2\overset{1}{\underset{1}{-\!\!+}}14\,a\,3\backsim a\,4\,{}^2/_2\,120$. (Adică: $154\,a-71\,a^2+14\,a^3-a^4=120$).

Descartes (1637): $y\,y\propto c\,y-\frac{c\,x}{b}\,y+a\,y-a\,c$. (Adică: $y^2=c\,y-\frac{c\,x}{b}\,y+a\,y-a\,c$).

Wallis (1693): $x^4+b\,x^3+c\,x\,x+d\,x+e=0$. Este forma actuală, afară, numai, de $x\,x$, care se scria în loc de x^2 până la începutul secolului al 19-lea.

Extragerea de rădăcină. Autorii vechi întrebuinţau de obicei însuşi cuvântul care însemna „rădăcina“ sau „latura“, sau prescurtarea lui, de ex., *l* (dela „latus“, latura unui patrat). In Evul

Mediu se scria cel mai des $R/$, o prescurtare pentru „radix“, atât în manuscrise, cât şi în cărţi tipărite. Astfel, *Luca Pacioli* (1494) scrie $R\,2^a$, $R\,3^a$ (în loc de $\sqrt{\ }$ şi $(\sqrt[3]{\ })$, iar *E. de la Roche* (1520) scrie R şi $R^2 (\equiv \sqrt{\ })$, $R\,\square$ şi $R^3 (\equiv \sqrt[3]{\ })$, Marii algebrişti italieni *Cardan* (1539) şi *Tartaglia* (1556) scriau $R/ (\equiv \sqrt{\ })$ şi R cu $\equiv \sqrt[3]{\ }$) Semnul $\sqrt{\ }$ apare pentru prima oara în cartea lui *Christoff Rudolff* („Die Coss“ 1525), fără nici-un indice. Semnul provine, probabil (faptul nu e sigur) dela un „*r*“ (≡„radix“) manuscris. A trecut mult timp până ce matematicienii au reuşit să exprime diferitele rădăcini cu ajutorul acestui nou semn. Se scria, de ex., $\sqrt{(3)} (\equiv \sqrt[3]{\ })$, $\sqrt{\ }\sqrt{\ } (\equiv \sqrt[4]{\ })$ etc. Litera „*l*“ s'a menţinut destul de mult, pentru a exprima rădăcina patrată. Intr'o carte din anul 1592 se găsesc următoarele notaţii: $l\,4 (\equiv \sqrt{4})$, $l\,c\,5 (\equiv \sqrt[3]{5})$, $l\,s\,q\,6$ şi $l\,l\,6 (\equiv \sqrt[4]{6})$ etc. In sfârşit, în cursul secolului al 17-lea, notaţia modernă învinge, deşi se mai păstrează unele varietăţi curioase, ca de ex., $\overset{C}{\sqrt{\ }}\overline{8\,x} (\equiv \sqrt{8\,x})$ şi $\overset{C}{\sqrt{\ }}\overline{24\,x\,x} (\equiv \sqrt[3]{24\,x^2})$. *Newton* scria $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{16}$, în loc de $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{16}$, dar întrebuinţa şi $\sqrt[3]{a}$.

Chiar într'o enciclopedie („Dictionnaire Mathématique“ al lui *Ozanam*, (1691) se găsesc notaţii ca: $\sqrt{\ } C.\,a\,a\,b (\equiv \sqrt[3]{a^2\,b})$ şi $\sqrt{\ } C.\,a^3 + 3\,a\,b\,b (\equiv \sqrt{a^3 + 3\,a\,b^2})$. Cât despre exponenţii negativi şi fracţionari, am expus câteva amănunte în rândurile consacrate „Ridicării la putere“.

PETRE V. CAZANACLI

25. — *Asupra problemei 932 din R. M. T.*

Acestei probleme publicată în R. M. T. pag. 72 şi rezolvată la pag. 130, vol. X, i se mai poate da şi următoarea soluţie:

Pentruca să rezolvăm ecuaţia mai generală:

$$\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = b,$$

considerăm pe $\sqrt[3]{a+x}$ şi $\sqrt[3]{a-x}$ ca rădăcinele ecuaţiei.

1) $$x^2 + p\,x + q = 0.$$

unde:

$$p = -b, \text{ iar } S_3 = 2\,a.$$

După formulele lui *Newton*:

$$S_3 = b^3 - 3\,b\,q = 2\,a,$$

de unde:

$$q = \frac{b^3 - 2\,a}{3\,b}$$

Din (1) se vede că:

$$q = \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b^3 - 2\,a}{3\,b},$$

de unde uşor se vede că:

$$x = \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{b^3 - 2\,a}{3\,b}\right)^2}$$

Făcând $a = 536$ şi $b = 16$, avem tocmai problema propusă.

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

26. — *Asupra unei probleme de Mecanică.*

La seminarul de Mecanică dela Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti ni s'a propus următoarea problemă:

O *dreptă* (D) *trecând prin punctul fix* O *se roteşte, într'un plan vertical, cu viteza unghiulara constantă* ω, *în jurul punctului O. Pe această dreaptă alunecă în jos un punct material greu* M *de masă m, care în momentul iniţial* $t = o$ *era în* O. *Ştiind că poziţia iniţială a dreptei* (D) *era axa orizontală* $O\,x$, *se cere ecuaţia polară a traectoriei absolute a punctului* M, *în raport cu axa* $O\,x$.

Problema se poate rezolva cu ajutorul mişcării relative, dar se poate şi altfel:

Fie $\overline{r}$ vectorul de poziţie al punctului M, φ unghiul dreptei (D) cu axa $O\,x$, $\overline{R}$ reacţia normală a dreptei, $\overline{g}$ intensitatea gravitaţiei.

Ecuaţia vectorială a mişcării punctului M este:

$$m\,\ddot{\overline{r}} = m\,\overline{g} + \overline{R},$$

în care $\ddot{\overline{r}}$ înseamnă acceleraţia.

Să proectăm această ecuaţie vectorială pe axa $O\,x$ şi pe o perpendiculară pe ea, $O\,y$. Fie x, y coordonatelele carteziane ale punctului M, faţă cu cele 2 axe.

Vom avea ecuaţiile:

$$m\ddot{x} = R\sin\varphi\,, \quad m\ddot{y} = mg - R\cos\varphi\,.$$

Scriem că M se află pe dreapta (D):

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

Dar: $\varphi' = \omega$, $(\varphi)_{t=o} = o$, deci: $\varphi = \omega t$.

Avem deci următoarele ecuaţii:

$$m\ddot{x} = R\sin\omega t$$

$$m\ddot{y} = mg - R\cos\omega t$$

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\omega t\,.$$

Ca să definim mişcarea şi deci traectoria, am putea elimina pe $\overline{R}$ (care nu e cunoscută) şi pe y, de exemplu, între aceste 3 ecuaţii şi să obţinem o ecuaţie diferenţială în x, care integrată ne va da pe x; vom deduce apoi pe y şi $\overline{R}$. Având pe x, y exprimate cu ajutorul parametrului t, vom avea ecuaţia traectoriei.

Ecuaţia diferenţială în x este însă de ordinul II şi nu prea simplă, încât e preferabil să luam alt drum, ca să ajungem la ecuaţia diferenţială a traectoriei şi apoi la ecuaţia ei polară.

Eliminăm pe $\overline{R}$ şi t între cele 3 ecuaţii şi avem următoarea ecuaţie diferenţială a traectoriei:

$$x\ddot{x} + y\ddot{} = gy\,.$$

Pentru integrare, să trecem la coordonate polare:

$x = r\cos\varphi = r\cos\omega t$, $y = r\sin\varphi = r\sin\omega t$

Avem:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\omega t - r\omega\sin\omega t$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\omega t + r\omega\cos\omega t$$

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\omega t - 2\dot{r}\omega\sin\omega t - r\omega^2\cos\omega t$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\omega t + 2\dot{r}\omega\cos\omega t - r\omega^2\sin\omega t$$

Ecuaţia diferenţială de mai sus devine:

$$r\ddot{r} - r^2\omega^2 = gr\sin\omega t\,,$$

sau:

$$r - \ddot{r}\omega^2 = g\sin\omega t\,,$$

care e o ecuaţie diferenţială liniară şi cu coeficienţi constanţi.

Ecuaţia fără membrul al 2-lea are ca integrală generală:

$$r = A\,e^{\omega t} + B\,e^{-\omega t}\,,$$

A, B fiind 2 constante de integrare.

Pentru ecuaţia completă se află uşor soluţia particulară:

$$r = -\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\,.$$

Deci integrala generală a ecuaţiei complecte este:

$$r = A\,e^{\omega t} + B\,e^{-\omega t} - \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\,.$$

Constantele A, B se determină prin condiţiile iniţiale:

$$(r)_{t=o} = o\,, \quad (\dot{r})_{t=o} = o.$$

se găseşte:

$$A = -B = \frac{g}{4\omega^2}\,.$$

Ecuaţia polară a traectoriei este deci:

$$r = \frac{g}{4\omega^2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi} - 2\sin\varphi)$$

CEZAR COSNITA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XXXVIII, No. 2, Octomvrie 1932. Quelques propriétés du triangle rectangle, par *V. Thébault*. Consideraţiuni practice la alcătuirea şi rezolvarea problemelor de matematică, de *I Ionescu*. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului „General *S. Panaitescu*", pe anul 1931—1932, de *Colonel Liteanu, Căpitan Gh. Niculescu, Ing. C. Orăşanu*.

2. *Gazeta Matematică*, Anul XXXVIII, No. 3, Noemvrie 1932. Sur trois figures semblables, par *V. Thébault*. Congresul internaţional al matematicienilor, de *Rodolphe Raclis*. *Vasile Conta*, de *Petre Sergescu*. Premiul *Vasile Canta*.

3. *Bulletin de Mathématiques et de Physique*, pure et appliquées de l'école Polytechnique „*Roi Carol II*", Bucarest, Année III (1931—1932), No. 2, Fasc. 8.

Beitrag zu einem Satz des Herrn *Pompeiu*, von Dr. D. *Barbilian*. Sur la moyenne des polynômes du troisiéme degré, par *Ernest Abason*. Sur la formule de la moyenne, par *G. Mlhoc*. La dilatation du fer et de l'acier entre $+40^0$ et -40^0, par *B. Bianu*. Les propriétés électro cinétiques du charbon colloide, par *Eugène Chirnoagă*. Sur les forces électromagnétiques. Tension et répulsion des lignes de force. Energie du champ magnétique, par *N. Vasilesco Karpen*. Observations sur la section verticale longitudinale d'une salle de theâtre. Considerations d'acoustique, par *Scarlat Fotino*.

4. *Revista de Ciencias*, Ano XXXIV, Lima-Perú, Enero a Setiembre 1932. La importancia del Análisis Vectorial y de la Geometria Diferencial para la deducción de las ecuationes fundamentales de la Mecánica, Dr. Ing. *Godofredo Garcia*. Notas sobre la geografia y geologia del

valle del rio Santiago, Dr. Ing. *Augosto Cabrera La Rosa.* Una contribution a la cuestion del es fuerzo elástico de dos cuerpos, Dr *Casimiro Francisco Vestulani.* La regulatión directa, Prof. *Luis Barbilion.*

5. *Boletin Matematico*, Ano *V*, Octombre 1932. (Buenos Aires, Republica Argentina); publicată de *Dr Bernardo I. Baidaff.* Maxim și minim relativ la dreapta $Ax+By+C=0$, de *B. I. Baidaff.*

6 *Boletin Matematico elementa'*, Anul III, Septemvrie și Octomvrie 1932. (Buenos Aires). Probleme rezolvate. Formula averei, de *B. I. Baidaff.*

7. *Revista Matematică a elev lor Craioveni*, Anul I, No. 2—3, Aprilie—Maiu. Interpretarea unui sistem de ecuații, de *Predoescu I. M.* O problemă de geometrie elementară, de *Predoescu I. M.*

8. *S. I. Costeanu.* Mesures de forces électromotrices dans l'ammoniac liquide. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Novembre 1932).

PROBLEME REZOLVATE

1091. — *Să se rezolve sistemul de ecuațiuni*

$$\begin{cases} 4x^2-12xy+6x-9y+9y^2=10 \\ 3x^2-2x+5xy-8y=14 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

Prima ecuație se poate scri:

$$(2x-3y)^2+3(2x-3y)-10=0$$

Rezolvind această ecuație de gradul al 2-lea în $(2x-3y)$, obținem:

$$2x-3y=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm 7}{2}$$

De aci rezultă:

$$2x-3y=-5$$
$$2x-3y=2$$

Sistemul dat este astfel echivalent cu sistemele:

$$(1)\quad \begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 3x^2-2x+5xy-8y=14 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} 2x-3y=2 \\ 3x^2-2x+5xy-8y=14 \end{cases}$$

1°. Să rezolvim intâi sistemul (1). Din prima ecuație deducem:

$$(3)\quad y=\frac{2x+5}{3},$$

care introdusă în a 2-a ecuație ne dă:

$$3x^2-2x+\frac{5x(2x+5)}{3}-\frac{8(2x+5)}{3}=14$$

Aducând la forma intreagă și simplificând, avem:

$$19x^2+3x-82=0,$$

de unde:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+6232}}{38}=\frac{-3\pm 79}{38},$$

deci:

$$x_1=2,\quad x_2=-\frac{41}{19}$$

Acest valori le substituim în (3) și avem astfel valorile corespunzătoare pentru y. Sistemul (1) este astfel echivalent, cu sistemele de soluții:

$$(4)\quad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \qquad (5)\quad \begin{cases} x=-\frac{41}{19} \\ y=\frac{13}{57} \end{cases}$$

2°. Să rezolvim acum sistemul (2). Din prima ecuație deducem:

$$(6)\quad y=\frac{2(x-1)}{3},$$

care întrodusă în a 2-a ecuație, ne dă:

$$3x^2-2x+\frac{10x(x-1)}{3}-\frac{16(x-1)}{3}=14$$

Aducând la forma întreagă și simplificând, obținem:

$$19x^2-32x-26=0$$

de unde deducem:

$$x=\frac{16\pm\sqrt{256+494}}{19}=\frac{16\pm 5\sqrt{30}}{19}$$

Deci:

$$x_1=\frac{16+5\sqrt{30}}{19},\quad x_2=\frac{16-5\sqrt{30}}{19}$$

Aceste valori le substituim în (6), și avem astfel valorile corespunzătoare pentru y. Sistemul (2), admite astfel următoarele sisteme de soluții:

$$(7)\quad \begin{cases} x=\frac{16+5\sqrt{30}}{19} \\ y=\frac{-6+10\sqrt{30}}{57} \end{cases} \qquad (8)\quad \begin{cases} x=\frac{16-5\sqrt{30}}{19} \\ y=\frac{-6-10\sqrt{30}}{57} \end{cases}$$

Sistemul de ecuaţii dat, admite deci patru sisteme de soluţii, date de (4), (5), (7) şi (8).

Soluţii date de d-nii: *Coandă I. Virgil* (lic., Milit., Craiova), *Cojocaru Marin* (lic. Milit., Craiova), *Ghiocel V. Vasile* (lic., Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Lupescu Gh. C-tin* (lic., Roman), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Mazilu Panaite* (lic. Internat, Iaşi), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăilă Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Nenciulescu H.* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Popescu Adrian Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Rezeanu P. Marin*, *Savovici Florentin* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Şerbu D. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Stănescu Iancu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Sterie N. Iosif* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Süli Mihai* (Şc. Polit., Timişoara), *Vasiliu Leoben Gheorghe* (Inginer) şi *Vasiliu Mircea* (lic. Milit., Cernăuţi).

1094. — *Să se rezolve un triunghiu* A B C, *cunoscând unghiul* A, *latura a şi raza cercului circumscris* r_a.

Aplicaţie: $\sphericalangle A = 90^0$, $a = 5$ cm., $r_a = 6$ cm.

V. ALACI

Prima soluţie. Din relaţiile cunoscute într'un triunghiu:

$$a + b + c = 2p, \quad r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

$$s = \frac{bc \sin A}{2} = r_a (p - a),$$

deducem succesiv:

$$(1) \qquad b + c = 2p - a = \frac{2 r_a}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} - a,$$

$$(2) \qquad bc = \frac{2 r_a (p - a)}{\sin A} = \frac{2 r_a}{\sin A} \left(\frac{r_a}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} - a \right) = \frac{r_a \left(r_a - a \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right)}{\sin^2 \frac{A}{2}}$$

Relaţiile (1) ne dau suma şi produsul laturilor b şi c, şi deci b şi c sunt rădăcinele ecuaţiei:

$$x^2 - \left(\frac{2 r_a}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} - a \right) x + \frac{r_a \left(r_a - a \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right)}{\sin^2 \frac{A}{2}} = 0$$

sau:

$$(3) \qquad 2 \sin^2 \frac{A}{2} \cdot x^2 - \sin A \left(2 r_a - a \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right) x + 2 r_a \left(r_a - a \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right) = 0$$

Astfel rezolvind această ecuaţie, avem laturile b şi c. Evident, trebuie ca realizantul ecuaţiei (3) să fie pozitiv şi laturile b şi c aflate, impreună cu latura a să permită construirea triunghiului.

Odată aflate laturile b şi c, pentru aflarea unghiurilor B şi C, folosim formulele:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}, \qquad \sin C = \frac{c \sin A}{a}$$

Cazul particular dat. Pentru $A = 90^0$, $a = 5$ cm., $r_a = 6$ cm., ecuaţia (3) devine:

$$x^2 - 7x + 12 = 0,$$

cu rădăcinele:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

Rezultă deci:

1^0. $b = 3$, $c = 4$ sau 2^0. $b = 4$, $c = 3$.

Unghiul A fiind de 90^0, putem folosi formula:

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \frac{3}{4} = 0{,}75, \quad \text{(în cazul } 1^0\text{)}.$$

Aplicând logaritmii, avem:

$$\lg \operatorname{tg} B = \overline{1}, 87506,$$

de unde rezultă:

$$B = 36^0, 62', 12'',$$

şi deci:

$$C = 90^0 - 36^0, 52', 12'' = 53^0, 7', 48''$$

Dacă luăm ipoteza 2^0, adică $b = 4$, $c = 3$, rezultă:

$$B = 53^0, 7', 48'' \quad , \quad C = 36^0, 52', 12''$$

Soluţii date de d-nii: *Băleanu D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit, Craiova), *Dan T. Traian* (bacalaureat), *Fofiu Cornel* (bacalaureat, Beiuş), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Margiulius Marius* (Bucureşti), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăilă Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Milea E.* (Sub-Lt.), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Nicolau Costin* (lic. Milit, Cernăuţi), *Patraulea Radu* (lic Milit. Tg.-Mureş), *Porumbescu D.* (Tg.-Ocna), *Rezeanu P. Marin*, *Savovici Florentin* (lic.

Milit., Tg.-Mureș), *Stoica I.* (Sub-Lt), *Süli Mihai* (Șc. Poit., Timișoara) și *Vasiliu Leoben Gh.* (inginer).

Soluția 2-a. Vom calcula întâi unghiurile B și C. Dacă în relațiile cunoscute:

$$s = r_a(p-a) = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A},$$

folosim relația:

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

putem scri:

$$r_a\left(\frac{r_a}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} - a\right) = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A},$$

de unde deducem:

$$(1) \qquad \sin B \sin C = \frac{4 r_a \cos^2 \frac{A}{2}\left(r^a - a \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)}{a^2}$$

De altă parte, avem:

$$(2) \qquad \sin B \sin C = \frac{\cos(B-C) - \cos(B+C)}{2} = \frac{\cos(B-C) + \cos A}{2}$$

Din relațiile (1) și (2) deducem:

$$(3) \quad \cos(B-C) = \frac{8 r_a \cos^2 \frac{A}{2}\left(r_a - a \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)}{a^2} - \cos A$$

Cum în membrul al 2-lea intră conform enunțului numai cantități cunoscute, dacă membrul al 2-lea este cuprins între -1 și $+1$, se poate afla $B-C$, fie α această diferență.

Avem, astfel:

$$\begin{cases} B - C = \alpha \\ B + C = 180^0 - A \end{cases}$$

deci:

$$B = 90 - \frac{A-\alpha}{2}$$

$$(4) \qquad C = 90 - \frac{A+\alpha}{2}$$

Odată aflate unghiurile B și C, laturile b și c se află din formulele:

$$(5) \qquad b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

Cazul particular dat, $A = 90$, $a = 5$ cm., $r_a = 6$ cm.

In acest caz relația (3) devine:

$$\cos(B-C) = \frac{48 \cdot \frac{1}{2}(6-5)}{25} = \frac{24}{25} = 0{,}96$$

De aci deducem;

$$\lg \cos B - C) = \overline{1}, 98227,$$

deci:

$$B - C = 16^0, 15', 40^0$$

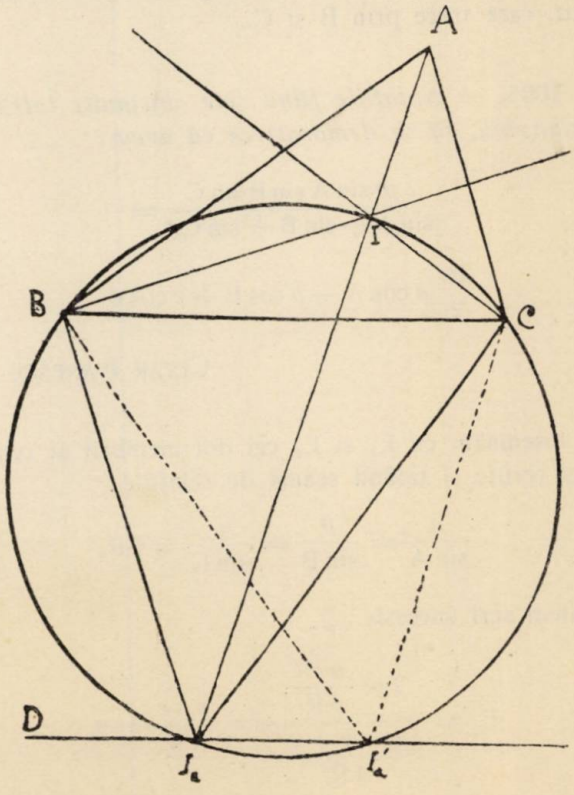
Relațiile (4) ne dau:

$$B = 53^0, 7', 50^0, \qquad C = 36^0, 52' 10''$$

Formulele (5) ne dau apoi ușor laturile b și c, care le-am găsit și în prima metodă.

Soluții date de d-nii: *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Lupescu Gh. C-tin* (Roman) și *Negrea A. Leonte Mircea* (licențiat în matematici).

Soluție geometrică. D-l Ivănescu Cezar (lic. Bârlad), a dat și următoarea soluție geometrică:



Presupun triunghiul A B C construit. Fie I centrul cercului înscris şi I_a centrul cercului exînscris unghiului A.

Înălţimea triunghiului $B I_a C$ este evident r_a. De aci rezultă următoarea construcţie. Construim întâi triunghiul $B I_a C$, în care cunoaştem baza B C, unghiul opus ei $\left(\sphericalangle B I_a C = 90^0 - \frac{A}{2}\right)$ şi înălţimea corespunzătoare.

Cazul acesta este cunoscut, în adevăr se construeşte un arc de cerc capabil de unghiul cunoscut $B I_a C$, care să treacă prin B, C şi apoi se taie acest arc de cerc, cu o paralelă la B C, dusă la distanţa r_a de ea. Intersecţia acestei paralele cu arcul de cerc construit, ne dă vârful I_a. Triunghiul $B I_a C$ fiind astfel construit, se duc în B şi C perpendiculare respectiv pe $B I_a$ şi $C I_a$, care intersectându-se ne dau centrul I al cercului înscris, a triunghiului cerut. Ducem apoi simetricele bazei B C în raport cu B I şi C I şi obţinem vârful A. Triunghiul A B C este astfel construit.

Putem avea două soluţii, una sau nici una, după cum paralela D e secantă, tangentă sau exterioară arcului capabil de unghiul $B I_a C$ cunoscut, care trece prin B şi C.

1095. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se demonstreze că avem:*

$$\frac{2p^2 \sin A \sin B \sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} = \frac{R}{2}(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$$

CEZAR IVANESCU

Insemnăm cu E_1 şi E_2 cei doi membrii ai relaţiei cerute şi ţinând seamă de relaţiile:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

putem scri succesiv;

$$(1) \qquad E_1 = \frac{2p^2 \frac{abc}{8R^3}}{\frac{(a+b+c)^2}{4R^2}} = \frac{abc}{4R} = s$$

$$E_2 = \frac{R}{2}(2R \sin A \cos A + 2R \sin B \cos B + 2R \sin C \cos C)$$

$$= \frac{R^2}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

Cum:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

(Culegere de Probleme, Trigonometrie Cap. XVII, 27),

avem:

$$(2) \quad E_2 = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = 2R^2 \cdot \frac{abc}{8R^2} = \frac{abc}{4R} = s$$

Comparând relaţiile (1) şi (2), deducem:

$$E_1 = E_2$$

Astfel relaţia cerută este stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit. Craiova), *Dan T. Traian* (Şc. Polit., Timişoara), *Fofiu Cornel* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghiocel V. Vasile* (lic., Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit, Craiova), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Lupescu Gh. C-tin* (Roman), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Negreă A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Popa Gh. Ioan* (Bucureşti), *Popescu Adrian* (student), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit, Craiova), *Porumbescu D.* (Tg.-Ocna), *Predoescu D. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Savovici Florentin* (lic Milit., Tg.-Mureş), *Stoica Ion* (Sub -Lt), *Süli Mihai* (Şc. Polit., Timişoara), *Theoharide Lucian* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Tica Petre Marin*, *Triscă S. Ioan* (Constanţa) şi *Vasiliu Leoben Gh.* (inginer).

1096. — *Să se găsească bipatratul a b c d e în care b e şi a c d sunt bipatrate.*

MARIN P. TICA

Ţinând seamă de enunţ, *b e* nu poate fi decât 01, 16, 81, iar *a c d* poate fi 256 sau 625.

Rezultă că bipatratul cerut, poate fi:

20561	21566	28561
60251	61256	68251

Dintre aceste numere singurul bipatrat este:

$$28561 = 13^4,$$

care ne dă singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-nii: *Anastasescu Mişu* (lic Târgovistea), *Ceauşescu Vasile* (lic. Milit., Iaşi), *Chiriac C-tin* (lic Milit. Iaşi), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru Marin* (lic. Milit., Craiova), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Dan T. Traian* (Şc. Polit., Timişoara), *Deniş C-tin* (lic, Roman), *Fofiu Cornel* (Şc. Polit., Timişoara), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit., Tg.-Mureş, *Ghiocel*

V. Vasile (lic., Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Hascal I. Herman* (lic. Roman), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ivănescu Cezar* (lic., Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Mazilu Panaite* (lic. Internat, Iaşi), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir (Bucureşti), *Mehedinţi D.* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihaiu Ion* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Motoc D. Mircea*, *Nenciulescu H.* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Petrescu D. C-tin* (Craiova), *Popa Gh. Ioan* (Oltenita), *Popa Nicolae* (lic., Beiuş), *Pănoiu Emanoil* (lic. Carol, Craiova), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit. Craiova), *Predoescu I. Marin* (lic. Craiova), *Racoţeanu Ion*, *Rezeanu P. Murin*, *Şandovici Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Soare I. Radu* (lic. Târgovişte), *Trică S. Ioan* (Constanţa) şi *Sterie N. Iosif* (lic. Milit. Tg.-Mureş).

1097. — *Se cere patratul perfect a b c d, în care produsul cifrelor de rang par, întrece cu o unitate pe acel al cifrelor de rang impar; câtul diviziunii numărului c d prin diferenţă cifrelor sale, întrece cu patrusprezece unităţi câtul diviziunii aceluiaşi număr prin suma cifrelor sale.*

CEZAR IVANESCU

Conform enunţului, avem:

$$b \times d = a \times c + 1 \tag{1}$$

şi

$$\frac{10c+d}{c-d} = \frac{10c+d}{c+d} + 14, \tag{2}$$

sau:

$$\frac{10c+d}{d-c} = \frac{10c+d}{c+d} + 14 \tag{2'}$$

Ştim apoi că ultimele două cifre ale unui patrat perfect sunt: 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96.

Dintre aceste numere constatăm uşor că numai 21 şi 84 satisfac condiţia (2) şi nici unul condiţia (2'). Rezultă dar că $c\,d$ este 21 sau 84.

1°. Luăm, $c\,d = 21$. Atunci relaţia (1) devine:

$$b = 2a + 1,$$

care e sătisfăcută în numere întregi pozitive, de sistemele de valori:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=5 \end{cases} \quad \begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases} \quad \begin{cases} a=4 \\ b=9 \end{cases}$$

Numărul $a\,b\,c\,d$ ar putea fi:

1321, 2521, 3721, 4921

Dintre acestea, numai 3721 este patrat perfect:

$$3721 = 61^2,$$

şi ne dă o soluţie a problemei.

2°. Luăm, $c\,d = 84$. Atunci relaţia (1), devine:

$$4b = 8a + 1,$$

care nu poate fi satisfăcută în numere întregi, primul membru fiind pnr şi al 2-lea impar.

Aşa dar, singura soluţie a problemei este:

$$3721 = 61^2$$

Soluţii date de dnii: *Anastasescu Mişu* (lic. Târgovişţea), *Băleanu D-tru*, *Coandă I. Virgil* (lic Milit, Craiova), *Cojocaru Marin* (lic. Milit., Craiova), *Ceauşescu Vasile* (lic. Milit., Iaşi), *Chiriac C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit, Craiova), *Fofiu Cornel* (Beiuş), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Mureş), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Milea E.* (Sub.-Lt.), *Nenciulescu Hariton* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Petrescu D. C-tin* (Craiova), *Racoţeanu Ion* (lic. Milit., Craiova), *Rezeanu P. Marin*, *Sandovici Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Soare I. Radu* (lic. Târgovişte), *Sterie N. Iosif* (lic. Milit., Tg-Mureş) *Stoica* G. *Ioan* (Sub.-Lt.), *Tica Petre Marin* şi *Triscă S. I.* (Constanţa).

1111. — *Să se arate că:*

$$\frac{a\,b\,c}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{h_a\,h_b\,h_c}{(h_c-h_a)(h_c-h_b)(h_b-h_a)},$$

a, b, c fiind laturile, iar h_a, h_b, h_c, *înălţimele unui triunghiu.*

ION MARGINEANU

Din relaţiunile cunoscute:

$$h_a = \frac{2s}{a}, \quad h_b = \frac{2s}{b}, \quad h_c = \frac{2s}{c},$$

deducem succesiv, simplificând:

$$\frac{h_a\,h_b\,h_c}{(h_c-h_a)(h_c-h_b)(h_b-h_a)}$$

$$= \frac{\frac{2s}{a}\cdot\frac{2s}{b}\cdot\frac{2s}{c}}{\left(\frac{2s}{c}-\frac{2s}{a}\right)\left(\frac{2s}{c}-\frac{2s}{b}\right)\left(\frac{2s}{b}-\frac{2s}{a}\right)}$$

$$= \frac{a\,b\,c}{(a-c)(b-c)(a-b)}$$

Avem astfel stabilită identitatea dată.

Soluţii date de d-nii: *Antonescu N.* (lic. Milit, Iaşi), *Bălean D-tru* (Şc Milit.), *Bedron Iosif* (lic. Beiuş), *Bercea Clement* (lic. Milit., Iaşi), *Biletchi Mircea* (Şc. Polit., Ti-

mişoara), *Blănaru Victor* (lic. Milit., Iaşi), *Buhanca Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Boerescu P. George* (Şc. Milit.), *Boisnard Jean* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Căzănescu Gr. Edmond Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Dan T. Traian* (Şc. Polit., Timişoara), *Dima D. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Farca Nicolae* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Fofiu Corneliu* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ivănescu Cezar* (absolvent, lic. Bărlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit.. de Artilerie), *Lupascu Ernest* (lic. Milit., Iaşi), *Margulius Marius* (Bucureşti), *Maşcaş Petru* (lic. Beiuş), *Mehedinţi D-tru* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Milea E.* (Sub-Lt.), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Negrea A. Leonte Mircea* (licenţiat Matematici), *Nenciulescu H.* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Nobler Emil* (lic Beius), *Patraulea N. Radu* (bacalaureat), *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Petre G. C-tin* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Popa Gh. Ioan* (Bucureşti), *Popescu Adrian* (studen), *Popovici I.* (lic. Milit., Iaşi), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Porumbescu D.* (Tg.-Ocna), *Predoescu I. M.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Racoţeanu Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Rezeanu P. Marin*, *Rogojan Alexandru* (Şc. Polit., Timişoara), *Săndulescu Ioan* (Şc Polit., Timişoara), *Süli Mihai* (Şc. Polit, Timişoara), *Schneller Corneliu* (lic. Milit, Iaşi), *Stoica Ioan* (Sub-Lt.), *Tica Petre Marin* Sub-Lt.), *Trică S. Ioan* (Constanţa) şi *Vasiliu Leoben Gh.* (Inginer).

PROBLEME PROPUSE

1153. — Trouver un nombre de deux chiffres sachant qu'en l'écrivant trois fois de suite et ajoutant l'unité au nombre ainsi trouvé, on obtienne un entier de six chiffres carré parfait.

V. THÉBAULT

1154. — Să se simplifice fracţiunea:

$$\frac{a(a^2-bc)^2+c(b^2-ac)^2}{a(a^2-bc)(b^2-ac)},$$

ştiind că:

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

A. COMAN

1155. — Să se rezolve ecuaţiunea:

$$9x^8-a^2x^4+2ax^2-1=0$$

GH. LEOBEN VASILIU

1156. Se dau relaţiile:

$$\begin{cases} u=x\cos y-y\cos z \\ v=x\sin y+y\sin z \\ w=x^2\cos 2y+y^2\cos 2z-2xy\cos(y-z) \end{cases}$$

Să se arate că putem elimina x, y, z între aceste relaţii şi în urmă să se găsească relaţia între u, v, w îndependentă de x, y, z.

V. MIOC

1157. — Fie O, centrul cercului circumscris triunghiului A B C. Două isogonale oarecare AA_b, AA_c ce pleacă din vârful A, taie cercul O, în punctele B_a şi C_a. Dacă M şi N sunt două puncte cari împart dreptele AA_b şi AA_c în raportul dat k; B' şi B'' intersecţiile dreptelor B M şi B N cu cercul O; C' şi C'' intersecţiile dreptelor C M şi C N cu cercul O, să se arate că perechile de drepte $(B'C_a, B''B_a)$, şi $(C'C_a, C''B_a)$ trec prin două puncte fixe.

IOAN I SANDULESCU

1158. — Se dă triunghiul A B C, bisectoarea unghiului A care tae pe B C în D şi D_1, D_2 proecţiile lui D respectiv pe A C şi A B. DD_1 tae înălţimea coborâtă din A pe B C, în E. Să se arate:

1°. Dreapta C_1D_2 [$C_1=(AD, EC)$] rămâne fixă ca direcţie, când $\sphericalangle A$ rămâne constant.

2°. Dreapta C_1O_1 (O_1 fiind proecţia centrului cercului circumscris O pe A C) trece printr'un punct fix A, variând ca în cazul precedent.

MIHAI M. SÜLI

1159. — Să se stabilească identitatea:

$$(2a_1-3a_0)\sin 2t-(a_1-3a_0)\sin 4t-a_0\sin 6t=$$
$$8\sin^3 t(a_0\cos 3t+a_1\cos t),$$

unde a_0 şi a_1 sunt numere oarecare.

Să se verifice pentru $t=\frac{\pi}{4}$, apoi pentru $a_0=0$.

V. ALACI

1160. — Să se găsească condiţia de mişcare circulară ştiind că acceleraţia sa e o coardă a cercului respectiv.

IOAN C. SCHILERU-DILI

Erată. Relaţia: $x_1y_1+x_2y_2+y_1+y_2=2$, din problema 1147, se înlocueşte astfel:

$$x_1y_1+x_2y_2+2(y_1+y_2)=2$$

INFORMAȚIUNI

LA REDACȚIA „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIȘOARA SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL V-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO

COSTUL UNUI ABONAMENT FIIND DE 300 LEI ȘI PENTRU ANUL AL III-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

COSTUL ABONAMENTULUI FIIND DE 125 LEI, PUBLICATE ÎN BUENOS AIRES; AMÂNDOUĂ 400 LEI

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XII. 15 IANUARIE 1932 NO. 11.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 ALEXANDRU NICULESCU ASUPRA DREPTEI LUI SIMPSON
2. NOTE MATEMATICE: 27, 28, 29.
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 1102 1104 1109.
5. PROBLEME PROPUSE: 1161-1168
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Avem plăcerea a anunța că începând dela 15 Ianuarie 1933, mai face parte dintre membrii „Revistei Matematici din Timișoara" și *D-l Constantin Ionescu Bujor*, licenciat în matematici, str. General Al. Radovici 5, București III, fost corespondent distins al „Revistei".

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Școala Politechnică din Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XI inclusiv, broșate, 120 lei fiecare

---

ANUL XII — NO. 11. TIMISOARA, 15 IANUARIE 1933

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

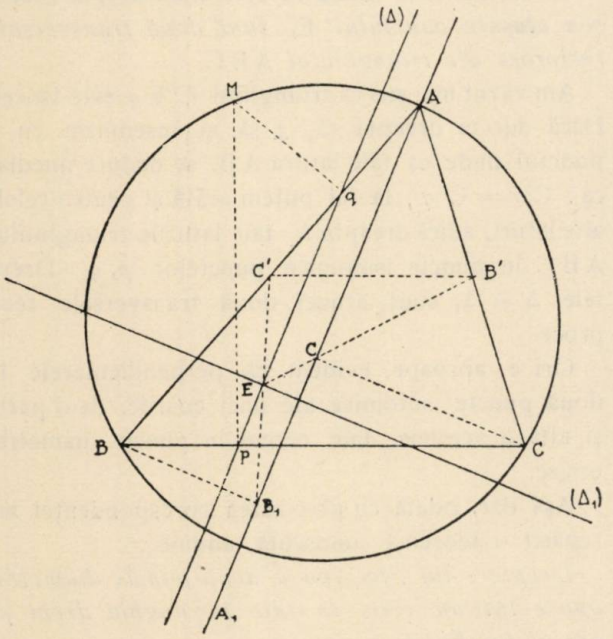
PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

ASUPRA DREPTEI LUI SIMPSON

de ALEXANDRU NICULESCU

Vreau să arăt o nouă definiție a dreptei lui *Simpson*, găsită cu ocazia soluției unei probleme propusă de d. *Goormaghigh* în revista „Mathesis“ pe anul 1932.



1. Fie ABC un triunghiu oarecare și AA_1 o dreaptă trecând prin vârful A; B' și C' mijloacele laturilor AC și AB. Ducem BB_1 și CC_1 perpendiculare pe AA_1 și fie E punctul de intersecție al dreptelor $(B'C_1, C'B_1)$. Să arăt că E este un punct pe cercul lui *Euler* și că dreapta Δ, dusă prin E, paralelă cu AA_1 este dreapta lui *Simpson* a unui punct de pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Pe figură avem:

$$\sphericalangle \Delta E B' = \sphericalangle A C_1 B' = \sphericalangle C_1 A B'$$
$$\sphericalangle \Delta E C' = \sphericalangle C_1 B_1 A = \sphericalangle B_1 A C'$$

deci:

$$\sphericalangle B' E C' = \sphericalangle C_1 A B' + \sphericalangle B_1 A C' = \sphericalangle B A C$$

și unghiul format în E este constant, locul geometric al acestui punct fiind cercul capabil de un unghiu egal cu $\hat{A}$ [dacă dreapta AA_1 ar fi fost exterioară unghiului $B\hat{A}C$, unghiul corespunzător din E ar fi fost $(\pi - A)$], trecând prin B' și C', deci cercul lui *Euler*.

Să arăt acum că dreapta Δ este dreapta lui *Simpson* a unui punct M de pe cercul circumscris. Fie p și q punctele unde Δ taie laturile BC și BA. Să însemnăm cu $\theta = \sphericalangle A_1 AC$; avem atunci în patrulaterul înscriptibil $Bpq M$:

$$\sphericalangle B M p = \sphericalangle B q p = \sphericalangle B A B_1 = \hat{A} - \theta$$
$$\sphericalangle p M q = \sphericalangle A B C = \sphericalangle B.$$

In triunghiul dreptunghic MqA am:

$$\overline{Aq} = \overline{Mq} \cdot \operatorname{tg} q \hat{M} A ,$$

iar în triunghiul MqB:

$$\overline{Mq} = \overline{qB} \cot (A + B - \theta);$$

deci:

$$\overline{Aq} = \overline{qB} \cdot \frac{\operatorname{tg} q \hat{M} A}{\operatorname{tg} (A + B - \theta)}$$

Rămâne să calculăm segmentele Aq și Bq în funcțiune de elementele cunoscute, laturile și unghiurile triunghiului ABC. Consider pentru aceasta triunghiul $EB'C'$; am:

$$\sphericalangle E B' C' = \sphericalangle E B' A - \sphericalangle C' B' A$$
$$= 180 - 2\theta - C$$

Aplicând acum teorema sinusului în triunghiul $EB'C'$ rezultă:

$$\overline{EC'} = B'C' \frac{\sin (180 - C - 2\theta)}{\sin A}$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin (C + 2\theta)}{\sin A}$$

şi de-aci:

$$\overline{qC'} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin (C + 2\theta)}{\sin A},$$

căci triunghiul $q\,C'E$ este evident isoscel, dreapta $q\,E$ fiind paralelă cu $A\,A_1$. Deducem atunci pentru segmentele $A\,q$ şi $B\,q$ valorile:

$$\overline{A\,q} = \overline{A\,C'} - \overline{C'\,q} = \frac{c}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin (C + 2\theta)}{\sin A}$$

$$\overline{B\,q} = \overline{B\,C'} + \overline{C'\,q} = \frac{c}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin (C + 2\theta)}{\sin A}.$$

Să înlocuim acum aseste valori în relaţia găsită mai sus, obţinem:

$$\frac{c}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin (C + 2\theta)}{\sin A} =$$

$$\left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin (C + 2\theta)}{\sin A} \right) \cdot \frac{\operatorname{tg} q\,M\,A}{\operatorname{tg} (A + B - \theta)}$$

sau, dacă substituim laturile prin sinusurile unghiurilor opuse şi facem simplificările necesare, avem:

$$\frac{\sin C - \sin (C + 2\theta)}{\sin C + \sin (C + 2\theta)} = \frac{\operatorname{tg} q\,M\,A}{\operatorname{tg} (180 - C - \theta)}$$

Aplicăm acum formulele calculabile prin logaritmi şi deducem:

$$-\frac{\cos (C + \theta) \,.\, \sin \theta}{\sin (C + \theta) \,.\, \cos \theta} = -\frac{\operatorname{tg} q\,M\,A}{\operatorname{tg} (C + \theta)},$$

de unde în definitiv:

$$\operatorname{tg} q\,M\,A = \operatorname{tg} \theta$$

şi cum unghiul $q\,M\,A$ nu poate fi decât ascuţit, ca unghiu al unui triunghiu dreptunghic, rezultă:

$$\widehat{qMA} = \theta$$

Prin urmare:

$$\sphericalangle\, BMA = (A - \theta) + B + \theta$$

$$= A + B = \pi - C$$

şi am demonstrat că M se află pe cercul circumscris triunghiului $A\,B\,C$.

Observări. a) Se poate arătă acum că pentru anumite puncte ale cercului lui *Euler* corespund drepte *Simpson* paralele cu drepte remarcabile ale unui triunghiu.

De exemplu: *„Dreapta lui Simpson care trece prin mijlocul laturii unui triunghiu este paralelă cu bisectoarea unghiului opus“.*

2. Această definiţie a dreptei lui *Simpson* stabileşte o corespondenţă între punctele cercului circumscris şi punctele cercului lui *Euler*. Să precizăm această corespondenţă. Prin construcţie se vede imediat, că dacă ne dăm un punct E, se determină două drepte $A\,A_1$ perpendiculare între ele (duse prin A); şi *prin urmare prin fiece punct al cercului Euler trec două drepte Simpson perpendiculare.* Vor corespunde atunci două puncte M pe cercul circumscris, puncte diametrul opuse după cum se ştie şi după cum vom arătă mai jos.

Să arătăm mai întâiu că *cele două drepte Simpson ataşate punctului* E, *sunt două transversale reciproce ale triunghiului* $A\,B\,C$.

Am văzut mai sus că triunghiul $C'\,E\,q$ este isocel. Dacă ducem dreapta $(\Delta_1) \perp (\Delta)$ şi insemnăm cu r punctul unde ea taie latura $A\,B$, se deduce imediat că: $C'\,r = C'\,q$; la fel putem arătă şi pentru celelalte laturi, adică dreapta Δ_1 taie laturile triunghiului $A\,B\,C$ în puncte isotomice punctelor p, q. Dreptele Δ şi Δ_1 sunt atunci două transversale reciproce.

Ori e aproape evident că perpendicularele în două puncte isotomice ale unei coarde, de-o parte şi alta a acesteia, taie cercul în puncte diametral opuse.

Aşa dar, odată cu precizarea corespondenţei am regăsit o teoremă cunoscută, anume.

Dreptele lui Simpson a două puncte diametral opuse într'un cerc, se taie în unghiu drept pe cercul lui Euler.

NOTE MATEMATICE

27. — *Semnele de relaţiune.*

Pentru a termina istoricul semnelor întrebuinţate în Algebră, trebue să spun câteva cuvinte despre semnele de relaţiune.

Egalitatea. Semnul egalităţii (de sigur, nu cel de acuma) este unul dintre cele mai vechi în Matematică. Astfel, în aşa zisul papirus al lui *Ahmes*

(circa 1550, în. de Chr.) apare o formă hieratică $\frac{\backslash|/}{\div}$, echivalentă cu hierogliful $\frac{\backslash|/}{\square}$, care însemna „împreună", rezultatul unei adunări. La Greci găsim un semn abia în timpurile lui *Diofante* (circa 275 după Chr.); în Aritmetica lui, egalitatea se exprimă prin semnele i^{σ} sau $i\,\sigma$, dela „$\iota\sigma o\varsigma$" (egal). Arabii au întrebuinţat, pentru acelaş scop, ultima literă a cuvântului „egalitate". Mai târziu, scriitorii Evului Mediu au uzat de cuvinte întregi, ca, de ex., „equantur" sau „equabitur" (*Fibonacci*, circa 1225). Studenţii medievali, pentru a înlesni transcrierea manuscriptelor, au adoptat o serie de prescurtări; alte prescurtări sunt datorite practicei comerciale (p în loc de „per", $\overset{0}{c}$ în loc de „cento" etc.). Iar egalitatea a început să fie însemnată cu α sau ∞; *Descartes* (1637) întrebuinţează şi el acest semn, care se găseşte în multe manuscripte din acea epocă. Se crede că el provine dela „ae", prescurtarea cuvântului „aequalis" (sau „aequales", „aequalia", „aequantur"). Alţi autori au întrebuinţat diferite alte semne. *Buteo* (1559) semnul $\sqsubset$; *Xylander* (1575), $||$; *Hérigone* (1634), $^2/_2$; *Leibnitz* (circa 1680), $=$, $\sqcap$ şi alte semne. Semnul actual al egalităţii ($=$) aparţine matematicianului englez *Robert Recorde* (în cartea lui „Whetslone of witte", London, 1557); el scrie: „Voi întrebuinţa în această lucrare o pereche de paralele, sau drepte gemene de aceeaşi lungime, deoarece nu există 2 lucruri care să fie mai egale". Invenţia aceasta este, deci, cu totul arbitrară, nu este prescurtarea vre-unui cuvânt. Semnul n'a devenit popular dintr'odată. Când, cu un secol mai târziu, *Rahn* (1622—1676) a publicat o carte de algebră, a trebuit să explice pe larg ce înseamnă noul simbol; semnul ∞ a continuat să fie întrebuinţat chiar în cursul secolului al 18-lea.

Neegalitatea. Semnele $>$ şi $<$, în loc de „mai mare" şi „mai mic", au fost inventate de englezul *Thomas Harriot* (în cartea lui „Artis Analyticae Praxis", 1631). Unii autori au preferat câtva timp semnele lui *Oughtred*, inventate cam tot pe atunci: $\sqsubset$ şi $\urcorner$; astfel, *Barrow*, profesorul lui *Newton*, scrie în „Lectiones Opticae et Geometricae" (1674): „A $\sqsubset$ B . A major est quam B . A $\urcorner$ B . A minor est quam B". Semnele moderne $\neq$, $\not>$, $\not<$ nu sunt recunoscute de către toţi. Mai des se întrebuinţează semnele $\geqq$ şi $\leqq$, inventate de un matematician francez *Pierre Bouguer* (1698—1758), care este cunoscut în Istoria Matematicilor mai mult din cauza cercetărilor asupra unei curbe curioase: „ligne de poursuite", sau, în cazul particular, „courbe du chien".

Parantezele. In secolul al 16-lea s'au întrebuinţat diferite semne pentru a arăta că anume operaţiuni se fac asupra sumelor sau diferenţelor neefectuate. Astfel, *Tartaglia* (1556) scrie: „22 men (22 men $\mathrm{R}\!/\,6$" în loc de „$22 - (22 - \sqrt{6})$". *Bombelli* (1572) întrebuinţează litera L („legato" şi aceaşi literă într'o poziţie întoarsă; astfel, expresiunea $2 + x + \sqrt{20 - 6x + x^2}$ el o scrie:

$$2\,.\,p\,\overset{1}{\smile}1\,.\,p\,.\,\mathrm{R}\,.\,q\,.\,\mathrm{L}\,20\,.\,m\,.\,\overset{1}{\smile}6\,.\,p\,.\,\overset{2}{1}\,\lrcorner\,,$$

iar patratul acestei expresiuni:

$$\overset{2}{\smile}2\,.\,p\,.\,24\,.\,m\,.\,\overset{1}{\smile}2\,.\,p\,.\,\mathrm{R}\,.\,q\,.\,\mathrm{L}\,\overset{1}{\smile}4\,.\,m\,.\,\overset{3}{\smile}8\,.\,p\,.\,\overset{1}{\smile}224\,.\,p\,.\,320\,\lrcorner\,.$$

Semnele acestea (L şi $\lrcorner$) par a fi sugerat matematicianului francez *Albert Girard* (1629) invenţiunea parantezelor, anume, a celor drepte: [ ]. Alţi autori italieni au întrebuinţat $\overline{\vee}$, prima literă a cuvântului „universalis", pentru a indica că o anume rădăcină trebue să fie extrasă din toată expresiunea care urmează. *Cardan*, în prima soluţie tipărită a ecuaţiei de gradul al 3-lea, scrie:

$$\mathrm{R}\!/\,\overline{\vee}: \text{ cu } \mathrm{R}\!/\,108\,p : 10$$
$$m : \mathrm{R}\!/\,\overline{\vee}: \text{ cu } \mathrm{R}\!/\,108\,m : 10\,,$$

ceeace înseamnă: $\sqrt{\sqrt[3]{108} + 10} - \sqrt{\sqrt[3]{108} - 10}$.

La începutul secolului al 17-lea parantezele au fost bine cunoscute, căci *Clavrus*, în algebra lui din anul 1608, le întrebuinţează fără nici-o explicaţie.

Inchei cu această scurtă notă, întocmită, ca şi cele precedente, după excelenta lucrare asupra Istoriei Matematicilor a lui *D. E. Smith* („History of Mathematics", vol. II), seria notelor consacrate semnelor algebrice.

O chestiune importantă şi demnă de cercetări amănunţite este următoarea: ce fel de semne s'au întrebuinţat în primele cărţi de Algebră (şi, în general, de Matematică) publicate în limba română? cine şi când le-a introdus, pentru întâia oară, în ţara noastră? După cât ştim, chestiunea aceasta nu este încă lămurită; cel puţin nu cunosc nici-un studiu consacrat ei

Voi căuta, pe cât îmi va fi posibil, să strâng cât mai multe date necesare şi sper să le pot aduce odată la cunoştinţa cititorilor „Revistei Matematice din Timişoara".

PETRE V. CAZANACLI

28. — *Trei puncte remarcabile într'un triunghiu.* Fie H ortocentrul, P_a şi A_2 respectiv punctele de intersecţie ale simedianei $\overline{AA'}$ şi medianei $\overline{AA_1}$ cu cercul circumscris O; A″ piciorul perpendicularei din P_a pe $\overline{BC}$; P_1 simetricul lui P_a în raport cu A″, iar D_1 punctul de intersecţie al dreptei $P_a P_1$ cu cercul O. Dacă M_a şi N_a sunt

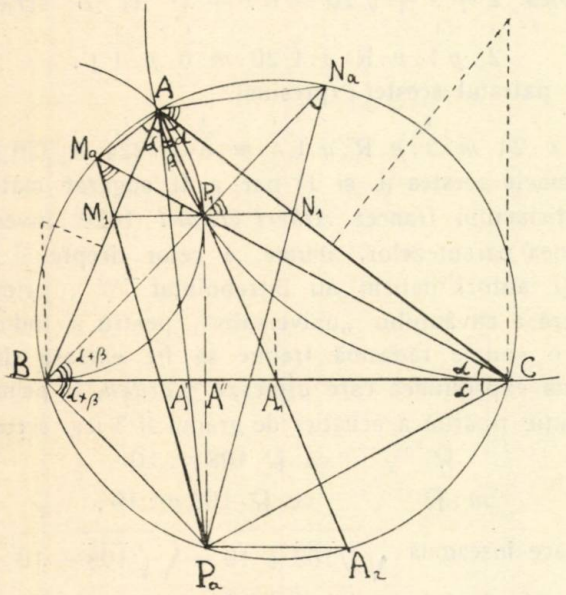


Fig. 1

punctele de intersecţie ale dreptelor $\overline{CP_1}$ şi $\overline{BP_1}$ cu cercul O; iar M_1 şi N_1 respectiv intersecţiile perechiler de drepte: $(\overline{AB}, \overline{P_a M_a})$ şi $(\overline{AC}, P_a N_a)$ să se arate că:

1. *Punctele* P_1, M_1 *şi* N_1 *sunt colineare. Deasemenea punctele analoage:* (P_2, M_2, N_2), (P_3, M_3, N_3).

2. *Punctul* P_1 *este simetricul lui* A_2 *în raport cu* A_1. *Analog* P_2 *simetricul lui* B_2 *în raport cu* B_1 *şi* P_3 *simetricul lui* C_2 *în raport cu* C_1.

3. *Punctele* P_1, P_2 *şi* P_3 *sunt respectic picioarele perpendicularelor din* H, *pe medianele* $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ *şi* $\overline{CC_1}$.

4. *Punctul* P_1 *este al doilea punct de intersecţie al cercurilor adjuncte tangente laturii* $\overline{BC}$. *Analog* P_2 *şi* P_3 *pentru* $\overline{AC}$ *şi* $\overline{AB}$.

5. *Punctele* P_1, P_2 *şi* P_3 *se găsesc respectiv pe cercurile* BHC, AHC *şi* AHB.

6. *Punctul* P_1 *este centrul cercului înscris în triunghiul* $M_a N_a P_a$; P_2 *şi* P_3 *în triunghiurile analoage* $M_b N_b P_b$ *şi* $M_c N_c P_c$.

7. P_1, P_2 *şi* P_3 *sunt respectiv ortocentrele triunghiurilor:* BCD_1, ACD_2 *şi* ABD_3.

8. *Punctul* P_1 *este ortocentrul triunghiului format de laturile* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ *şi de dreapta lui Simpson, a punctului* P_a. *Analog pentru punctele* P_2 *şi* P_3.

9. *Triunghiurile podare ale punctelor* P_1, P_2 *şi* P_3 *sunt isoscele.*

10. *Punctele* P_1, P_2 *şi* P_3 *se găsesc pe cercul de diametru* GH (G *fiind centrul de greutate*).

Se ştie că mediana şi simediana fac unghiuri egale cu laturile ce pleacă din acclaş vârf, deci: $\widehat{BAP_a} = \widehat{CAA_2} = \hat{\alpha}$.

Triunghiurile P_1BP_a şi P_1CP_a fiind isoscele avem: $\widehat{P_1BA''} = \widehat{A''BP_a}$ şi $\widehat{P_1CA''} = \widehat{A''CP_a}$. Dar $\widehat{A''BP_a} = \widehat{CAP_a} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$ şi $\widehat{A''CP_a} = \widehat{BAP_a} = \alpha$; vom avea şi $\widehat{P_1BC} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$ şi $\widehat{P_1CB} = \hat{\alpha}$. Urmează imediat $\widehat{BAM_a} = \hat{\alpha}$ şi $\widehat{CAN_a} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$. Patrulaterele $AP_1M_1M_a$ şi $AP_1N_1N_a$ sunt înscriptibile pentrucă $\widehat{CM_aP_a} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$ şi $\widehat{BN_aP_a} = \hat{\alpha}$. Rezultă că $\widehat{M_aP_1M_1} = \widehat{M_aAM_1} = \hat{\alpha}$ şi $\widehat{N_aP_1N_1} = \widehat{N_aAP_1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$. Urmează că $\overline{M_1P_1} \parallel \overline{BC}$ şi $P_1N_1 \parallel BC$, deci:

(1) *punctele* M_1, P_1 şi N_1 *sunt colineare,* iar $\overline{M_1N_1} \parallel \overline{BC}$. (Fig. 1.)

Pentru că arc BP_a = arc CA_2 dreptele $\overline{BC}$ şi $\overline{P_aA_2}$ sunt paralele. In triunghiul $P_1P_aA_3$ avem; $\overline{P_1A''} = \overline{A''P_a}$ şi $\overline{A''A_1} \parallel \overline{P_aA_2}$ urmează şi:

(2) $A_1P_1 = A_1A_2$, P_1 *este deci simetricul lui* A_2 *în raport cu* A_1. (Fig. 1.)

Fie E_1 punctul diametral opus vârfului A. Se ştie că punctele H, A_1 şi E_1 sunt colineare iar $\overline{HA_1} = \overline{A_1E_1}$. Am văzut că $\overline{A_1P_1} = \overline{A_1A_2}$, urmează că triunghiurile HA_1P_1 şi $A_1A_2E_1$ sunt egale.

Rezultă $\widehat{HP_1A_1} = \widehat{A_1A_2E_1} = 90^0$ pentrucă $\overline{AE_1}$ este diametru, deci:

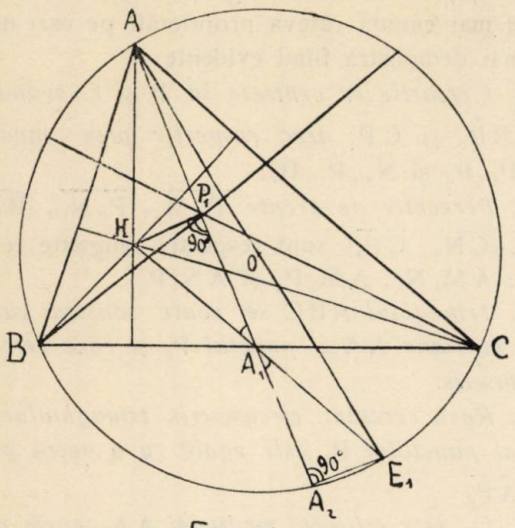


Fig. 2

(3) *punctul* P_1 *este piciorul perpendicularei din* H *pe* $\overline{AA_1}$. (Fig. 2.)

Triunghiurile ABA_1 şi P_1BA_1 (Fig. 1) sunt asemenea având unghiul $\widehat{AA_1B}$ comun şi $\widehat{BAA_1} = \widehat{P_1BA_1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$. Din proporţionalitatea laturilor avem: $\frac{BA_1}{P_1A_1} = \frac{AA_1}{BA_1}$ sau $\overline{BA_1}^2 = \overline{A_1A} \times \overline{A_1P_1}$, relaţie care arată că $\overline{A_1B}$ este tangentă cercului AP_1B. Cum $\overline{BA_1} = \overline{A_1C}$ urmează şi $\overline{A_1C}^2 = \overline{A_1A} \times \overline{A_1P_1}$, relaţie care arată că $\overline{A_1C}$ este tangentă cercului AP_1C, rezultă că $\overline{BC}$ este tangenta comună cercurilor AP_1B şi A_1P_1B; reciproc deci:

(4) *cercurile adjuncte tangente laturii* $\overline{BC}$ *se taie* P_1.

Se ştie că unghiul $\widehat{BHC}$ este suplimentul lui $\widehat{BAC}$. Patrulaterul BP_1CA_2 fiind un paralelogram (Fig. 3.) urmează că $\widehat{BP_1C} = \widehat{BA_2C}$, cum $\widehat{BA_2C}$ este suplimentul lui $\widehat{BAC}$ şi $\widehat{BP_1C}$ este suplimentul lui $\widehat{BAC}$, deci $\widehat{BP_1C} = \widehat{BHC}$, de unde:

(5) *reese că punctul* P_1 *se găseşte pe cercul* BHC.

In triunghiul $M_aN_aP_a$, observăm că: $\widehat{M_aN_aB} = \widehat{BN_aP_a} = \hat{\alpha}$ şi $\widehat{N_aM_aC} = \widehat{CM_aP_a} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$, egalităţi din care se vede că $\overline{M_aC}$ şi N_aB sunt bisectoarele unghiurilor din M_a şi N_a, iar:

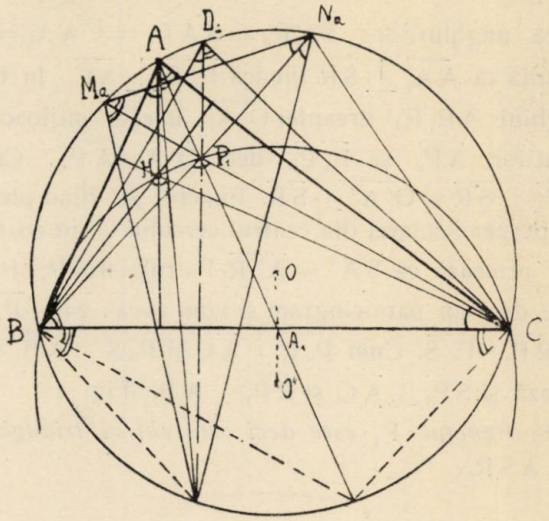


Fig. 3

(6) P_1, punctul lor de intersecţie *este centrul cercului înscris în triunghiu* $M_aN_aP_a$.

Din egalitatea unghiurilor $\widehat{CD_1P_a} = \widehat{CBP_a} = \widehat{P_1BC}$ rezultă că $\overline{BP} \perp \overline{CD_1}$ fiindcă $\overline{D_1P_1} \perp \overline{BC}$. Rezultă că *punctul* P_1:

(7) *este ortocentrul triunghiului* BCD. (Fig. 3.)

Fie S şi R punctele de intersecţie ale dreptelor

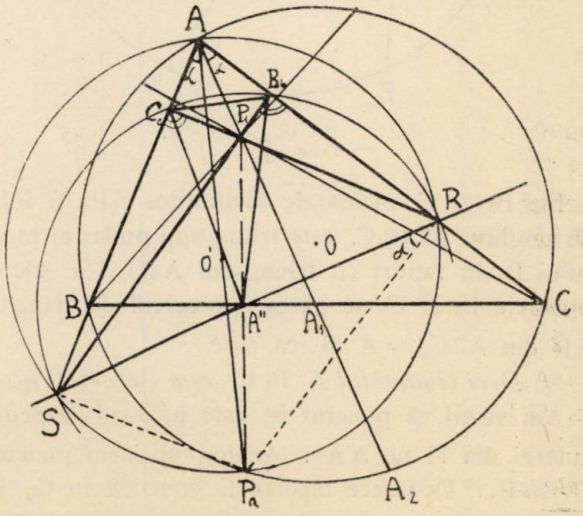


Fig. 4

$\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ cu dreapta lui *Simpson* a punctului P_a. Se ştie că patrulaterul ASP_aR este înscriptibil, iar punctul O' centrul cercului circumscris lui se găseşte la jumătatea dreptei $\overline{AP_a}$. Din egalitatea unghiurilor: $\widehat{SRP_a} = \widehat{SAP_a} = \widehat{CAA_2} = \hat{\alpha}$ rezultă că $\overline{AA_2} \perp \overline{SR}$ fiindcă $\overline{P_aR} \perp \overline{AC}$. In triunghiul AP_1P_a dreaptei $\overline{O'A''}$ uneşte mijloacele laturilor $\overline{AP_a}$ şi $\overline{P_1P_a}$ deci $\overline{O'A} \parallel \overline{AP_1}$. Cum $\overline{AP_1} \perp \overline{SR}$ şi $\overline{O'A''} \perp \overline{SR}$. Punctul A'' fiind piciorul perpendicularei din centrul cercului O' pe coarda $\overline{SR}$ urmează că $\overline{SA''} = \overline{A''R}$. Patrulaterul P_1SP_aR este deci un paralelogram şi vom avea: $\overline{SP_1} \parallel \overline{P_aR}$ şi $\overline{RP_1} \parallel \overline{P_aS}$. Cum $\overline{P_aR} \perp \overline{AC}$ şi $\overline{P_aS} \perp \overline{AB}$, urmează şi $\overline{SP_1} \perp \overline{AC}$ şi $\overline{RP_1} \perp \overline{AB}$. (Fig. 4.)

(8) *Punctul* P_1 *este deci ortocentrul triunghiului* ASR.

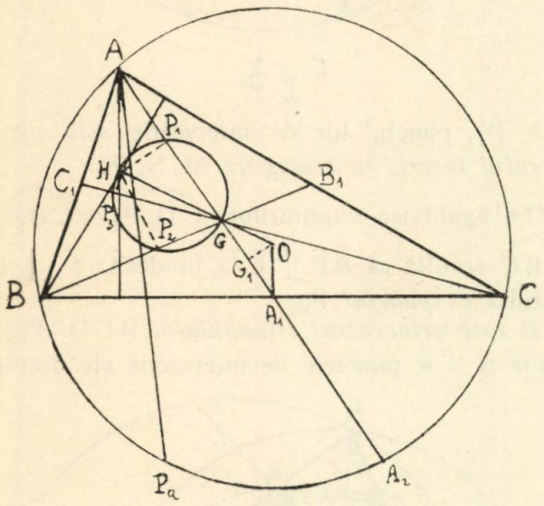


Fig 5

Fie B_b şi C_c picioarele înălţimilor $\overline{SP_1}$ şi $\overline{RP_1}$. Triunghiul $A''B_bC_c$ este triunghiul podar al punctului P_1 în raport cu triunghiul ABC. Se ştie că punctele B_b şi C_c se găsesc pe cercul de diametru $\overline{SR}$ din $\overline{A''C_c} = \overline{A''B_b}$ ca raze.

(9) *Deci triunghiul* $A''B_bC_c$ *este isoccel.* (Fig. 4.)

Am văzut că punctul P_1 este piciorul perpendicularei din H pe $\overline{AA_1}$. Analog obţinem punctele P_2 şi P_3. Deoarece medianele concură în G, iar triunghiurile dreptunghice HP_1G, HP_2G, HP_3G au aceiaş ipotenuză, rezultă că: (Fig. 5.)

(10) *punctele* P_1, P_2, P_3, *se găsesc pe cercul de diametru* $\overline{HG}$.

Pentru punctele P_2 şi P_3, nu am mai făcut demonstraţii, ele fiind analoage punctului P_1.

Voi mai enunţa câteva proprietăţi pe cari nu le voi mai demonstra fiind evidente.

(11) *Cercurile cu centrele în* B *şi* C *având ca raze* $\overline{BP_1}$ *şi* $\overline{CP_1}$ *trec respectiv prin punctele* M_a, P_1, P_a *şi* N_a, P_1, P_a.

12. *Perechile de drepte* $(\overline{P_aM_1}, \overline{P_aN_1})$, $(\overline{BM_a}, \overline{BP_1})$, $(\overline{CN_a}, \overline{CP_1})$ sunt respectiv tangente cercurilor: AM_1N_1, AM_1P_1 şi AN_1P_1.

13. *Triunghiul* ABC *se poate construi cunoscând mediana* AA_1, *punctul* P_1 *şi raza cercului circumscris.*

14. *Raza cercului circumscris triunghiului podar al punctului* P_1 *este egală cu a patra parte din* $\overline{AP_a}$.

15. G_1 *este mijlocul medianei* AA_2 *avem relaţiile:* $\overline{AP_1} = 2\overline{G_1A_1}$ şi $\overline{P_1G} = 2\overline{GG_1}$. (Fig. 5.)

In câteva cazuri izolate de rezolviri de probleme, întâlnim punctele P_1, P_2 şi P_3, fără să aibă roluri hotărâtoare în rezolvarea acelor probleme, pe când pe baza proprietăţilor citate se pot enunţa mult mai simplu, foarte multe probleme, a căror rezolvare se bazează pe aceleaş proprietăţi.

De ex. *Să se arate că dreptele* $\overline{CP_1}$ *şi* $\overline{BP_1}$ *sunt tăiate de antiparalelele duse din* P_a *la laturile* $\overline{AB}$ *şi* $\overline{AC}$, *pe cercul* O *circumscris triunghiului* ABC. (*Punctul* P_1 *fiind intersecţia medianei* AA_1 *cu cercul* BHC *iar* P_a, *intersecţia simediami* AA' *cu cercul* O.)

Tot astfel se pot pune foarte multe probleme a căror rezolvare se reduce la aplicarea proprietăţilor de mai sus.

IOAN I. SANDULESCU

29. — *Generalizarea problemei 1073 din „R. M. T.“*

In rândurile ce urmează, îmi propun să dau o generalizare a problemei 1073 din R. M. T.

Voiu stabili pentru aceasta următoarea identitate:

$$\frac{\sum_{p=o}^{n} C_n^p\, y^{n-p}\, x^p\, (x^{3n-2p}\, y^{2p} - 1)}{\sum_{p=o}^{n+1} C_{n+1}^p\, y^{n-p+1}\, x^p\, (x^{2n-2p+2}\, y^{2p} - 1)} =$$

$$\frac{x^{2n}y^n - 1}{(x+y)(x^{n+1}y^{n+1} - 1)}$$

Numărătorul primului membru al ecestei identităţi se poate scri succesiv:

$$y^n(x^{3n} - 1) + C_n^1 y^{n-1} x(x^{3n-2} y^2 - 1) + \ldots +$$
$$C_n^{n-1} y x^{n-1}(x^{n+2} y^{2n-2} - 1) + x^n(x^n y^{2n} - 1) =$$
$$(y^n x^{3n} + C_n^1 y^{n+1} x^{3n-1} + \ldots + C_n^{n-1} y^{2n-1} x^{2n+1} +$$
$$x^{2n} y^{2n}) - (y^n + C_n^1 y^{n-1} x + \ldots + C_n^{n-1} y x^{n-1} +$$
$$x^n) = (x^{2n} y^n)(x^n + C_n^1 y x^{n-1} + \ldots +$$
$$C_n^{n-1} y^{n-1} x + y^n) - (y+x)^n =$$
$$x^{2n} y^n (x+y)^n - (x+y)^n = (x+y)^n (x^{2n} y^n - 1)$$

Numitorul primului membru a aceleiaşi identităţi se poate scri succesiv:

$$y^{n+1}(x^{2n+2} - 1) + C_{n+1}^1 y^n x(x^{2n} y^2 - 1) + \ldots +$$
$$C_{n+1}^n y x^n (x^2 y^{2n} - 1) + x^{n+1}(y^{2n+2} - 1) =$$
$$(y^{n+1} x^{2n+2} + C_{n+1}^1 y^{n+2} x^{2n+1} + \ldots$$
$$+ C_{n+1}^n y^{2n+1} x^{n+2} + y^{2n+2} x^{n+1}) -$$
$$(y^{n+1} - C_{n+1}^1 y^n x + \ldots + C_{n+1}^n y x^n + x^{n+1}) =$$
$$(x^{n+1} y^{n+1})(x^{n+1} + C_{n+1}^1 y x^n + \ldots$$
$$+ C_{n+1}^n y^n x + y^{n+1}) - (y+x)^{n+1} =$$
$$x^{n+1} y^{n+1}(x+y)^{n+1} - (y+x)^{n+1} =$$
$$(x+y)^{n+1}(x^{n+1} y^{n+1} - 1)$$

Putem deci scrie:

$$\frac{\sum_{p=0}^{n} C_n^p y^{n-p} x^p (x^{3n-2p} y^{2p} - 1)}{\sum_{p=0}^{n+1} C_{n+4}^p y^{n-p+1} x^p (x^{2n-2p+2} y^{2p} - 1} =$$
$$\frac{(x+y)^n (x^{2n} y^n - 1)}{(x+y)^{n+1}(x^{n+1} y^{n+1} - 1)} = \frac{x^{2n} y^n - 1}{(x+y)(x^{n+1} y^{n+1} - 1)}$$

şi identitatea ce ne-am propus este astfel stabilită.

Pentru $n = 2$ avem:

$$\frac{y^2(x^6 - 1) + 2xy(x^4 y^2 - 1) + x^2(x^2 y^4 - 1)}{y^3(x^6 - 1) + 3xy^2(x^4 y^2 - 1) + 3x^2 y(x^2 y^4 - 1) + y^3(x^6 - 1)} =$$
$$\frac{x^4 y^2 - 1}{(x+y)(x^3 y^3 - 1)}$$

unde înmulţind ambii membri cu y găsim tocmai identitatea din problema 1073.

CEZAR IVANESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVIII, No. 4, Decemvrie 1932. Noui lecţii făcute de savanţii străini la Universitatea din Cluj, de *George Călugăreanu*. Premiul *„Inginer Al. Roşu"*, de: *N. Botea, Col. Gh. Buicliu* şi *Col. Gh. Liteanu*. Regulamentul fondului *„V. Cristescu"* fond instituit de fraţii: Căpităn *Gh. Niculescu*, *Dr. Miron Niculescu*, profesor la Universitatea de Cernăuţi şi *Alexandru Niculescu* profesor de matematici la liceul Giurgiu. Premiul, *Inginer H. Capriel*.

2. *Boletin Matematico elemental*, Ano III, No. 9, Noviembre 1932. (Buenos Aires, Republica Argentina); publicată de *Dr. Bernardo I. Baidaff*. Practica inecuaţiilor, de *B. I. Baidaff*.

3. *Boletin Matematico*. Ano V, Noviembre 1932. (Buenos Aires, Republica Argentina); publicată de *Dr. Bernaldo I. Baidaff*. Ecuaţii parametrice, de *Clifford Bell*. Asupra sistemelor de inecuaţii liniare, de *F. La Menza*.

PROBLEME REZOLVATE

1102. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec} y + \operatorname{cosec} z = 3 + \sqrt{2} \\ \Sigma \cos^2 x (\sin y + \sin z) = \dfrac{12 - 3\sqrt{2}}{8} + \\ \qquad 3 \sin x \sin y \sin z \end{cases}$$

IOAN S. TRICA

Soluţie dată de d-l *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad).

Sistemul dat se poate scri:

$$(1) \quad \begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin y} + \dfrac{1}{\sin z} = 3 + \sqrt{2} \\ \Sigma (1 - \sin^2 x)(\sin y + \sin z) = \dfrac{12 - 3\sqrt{2}}{8} + \\ \qquad 3 \sin x \sin y \sin z \end{cases}$$

Dacă notăm:

$$(2)\quad \begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = u \\ \sin x \sin y + \sin y \sin z + \sin z \sin x = v \\ \sin x \sin y \sin z = w, \end{cases}$$

atunci sistemul (1) devine:

$$(3)\quad \begin{cases} u = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2} \\ v = (3+\sqrt{2})\, w \\ \Sigma (1 - \sin^2 x)(u - \sin x) = \dfrac{12 - 3\sqrt{2}}{8} + 3w \end{cases}$$

Ultima ecuaţie se poate scri încă:

$$\Sigma (u - \sin x - u \sin^2 x + \sin^3 x) = \frac{12 - 3\sqrt{2}}{8} + 3w,$$

sau:

$$3u - (\sin x + \sin y + \sin z) - u(\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z) + \sin^3 x + \sin^3 y + \sin^3 z = \frac{12 - 3\sqrt{2}}{8} + 3v$$

Această ecuaţie se mai poate scri încă, ţinând seamă de (2):

$$(3)\qquad 2u - u(\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z) + \sin^3 x + \sin^3 y + \sin^3 z - 3w = \frac{12 - 3\sqrt{2}}{8}$$

Ţinând seamă că putem scri succesiv:

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = (\sin x + \sin y + \sin z)^2 - 2(\sin x \sin y + \sin y \sin z + \sin z \sin x) = u^2 - 2v$$

$$\sin^3 x + \sin^3 y + \sin^3 z - 3 \sin x \sin y \sin z = (\sin x + \sin y + \sin z)(\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z - \sin x \sin y - \sin y \sin z - \sin z \sin x) = u(u^2 - 3v),$$

ecuaţia (4) devine:

$$2u - u(u^2 - 2v) + u(u^2 - 3v) = \frac{12 - 3\sqrt{2}}{8},$$

sau:

$$u(2 - v) = \frac{12 - 3\sqrt{2}}{8}$$

Această ecuaţie, ţinând seamă de prima ecuaţie din sistemul (3), devine:

$$2 - v = \frac{12 - 3\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{2}{3+\sqrt{2}} = \frac{(12 - 3\sqrt{2})(3 - \sqrt{2})}{4(3^2 - 2)} = \frac{7(6 - 3\sqrt{2})}{4 \times 7} = \frac{6 - 3\sqrt{2}}{4}$$

De aci deducem:

$$v = 2 - \frac{6 - 3\sqrt{2}}{4} = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{4}$$

Substituind această valoare a lui v, în a 2-a ecuaţie a sistemului (3), deducem:

$$w = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{4(3+\sqrt{2})} = \frac{(2 + 3\sqrt{2})(3 - \sqrt{2})}{4 \times 7} = \frac{7\sqrt{2}}{4 \times 7} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Am găsit astfel:

$$\begin{cases} u = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2} \\ v = \dfrac{2+3\sqrt{2}}{4} \\ w = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

In virtutea acestor valori găsite pentru u, v, w sistemul dat, sau sistemul (2), este echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2} \\ \sin x \sin y + \sin y \sin z + \sin z \sin x = \dfrac{2+3\sqrt{2}}{4} \\ \sin x \sin y \sin z = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Aceste relaţiuni scriu suma lui $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$, suma produselor lor câte două şi produsul lor şi atunci rezultă după cele ce ştim despre relaţiile ce există între rădăcinile şi coeficienţii unei ecuaţii, că $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$ sunt rădăcinele ecuaţiei:

$$t^3 - \frac{3+\sqrt{2}}{2} t^2 + \frac{2+3\sqrt{2}}{4} t - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$$

sau:

$$4t^3 - 2(3+\sqrt{2})t^2 + (2+3\sqrt{2})t - \sqrt{2} = 0$$

Această ecuaţie anulându-se pentru $t = 1$, se divide prin $t - 1$ şi deci se descompune astfel:

$$(t-1)\,[4t^2-(2+2\sqrt{2})\,t+\sqrt{2}\,]=0$$

Rădăcinele acestei ecuaţii sunt:

$$t_1=1,\quad t_2=\frac{1}{2},\quad t_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rezultă dar pentru $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$ următoarele sisteme de valori pe cari le înscrim în tabloul următor:

$\sin x$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin y$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\sin z$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1

Cunoscând pe $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$, putem afla cu uşurinţă arcele corespunzătoare:

Astfel dacă luăm sistemul:

$$\begin{cases} \sin x=1 \\ \sin y=\frac{1}{2} \\ \sin z=\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

îi corespunde sistemul de soluţii:

$$\begin{cases} x=(4k+1)\frac{\pi}{2}, & (k=0,1,2,\ldots) \\ y=k_1\pi+(-1)^{k_1}\frac{\pi}{6}, & (k_1=0,1,2,\ldots) \\ z=k_2\pi+(-1)^{k_2}\frac{\pi}{4}, & (k_2=0,1,2,\ldots) \end{cases}$$

Dacă în primii membrii ai acestui sistem, înlocuim pe x,y,z respectiv prin: x,z,y; y,x,z; y,z,x; z,x,y; z,y,x, avem toate sistemele de soluţii a sistemului dat.

Au mai dat soluţii dnii: *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru Marin* (lic. Milit., Craiova), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit, Craiova), *Fofiu Cornel* (Şc. Polit., Timişoara), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Margulius Marius* (Bucureşti), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti) şi *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova).

1104. — *Un proprietar împarte un capital al său în trei părţi, pe care le depune la trei bănci. Prima parte o depune cu 10%; a doua parte care este $\frac{2}{3}$ din prima o depune cu 12%; în fine a treia parte care este $\frac{3}{4}$ din prima o depune cu 15%. După 2 ani retrage toate capitaluriile împreună cu dobânzile lor, şi suma astfel rezultată o depune la o altă bancă cu 20%. După 3 ani retrage capitalul împreună cu dobânda şi are suma de 57632 lei. Care a fost capitalul depus la început?*

VIRGIL CLAUDIAN

Soluţie aritmetică. Să vedem întâi care este capitalul, care depus cu 20%, devine 57632. Observăm că 100 lei devine după 3 ani, cu 20%, împreună, cu dobânda 160 lei.

Dacă 160 lei, este adus de, 100 lei
57632 lei, este adus de, x

deci: $$x=\frac{57632\times 100}{160}=36020 \text{ lei}$$

Această sumă de 36020, provine din insumarea celor trei părţi în care a fost împărţit capitalul iniţial, împreună cu dobânzile lor corespunzătoare pe timp de 2 ani.

Capitalurile depuse raportate la prima parte sunt,

$$1,\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{4}$$

Dobânzile corespunzătoare pe 2 ani, ţinând seamă că cele trei părţi sunt date respectiv cu 10%, 12%, şi 15%, sunt:

$$\frac{1\times 10\times 2}{100}=\frac{1}{5},\qquad \frac{2\times 12\times 2}{3\times 100}=\frac{4}{25},$$

$$\frac{3\times 15\times 2}{4\times 100}=\frac{9}{40}$$

Capitalurile împreună cu dobânzile corespunzăteare devin:

$$1+\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{25}+\frac{3}{4}+\frac{9}{40}=\frac{1801}{600}$$

Aceasta înseamnă că dacă prima parte care a fost pusă la dobândă, o împărţim în 600 de părţi egale, 1801 de aceste părţi valorează suma de 36020. O parte din cele 1801, va valora:

$$\frac{36020}{1801}=20 \text{ lei.}$$

Atunci prima parte din capitalul iniţial, conţinând 600 de părţi valorează:

$$20\times 600=12000 \text{ lei.}$$

A 2-a parte valorând $\frac{2}{3}$ din prima parte, este:

$$12000\times\frac{2}{3}=8000 \text{ lei}$$

A 3-a parte fiind $\frac{3}{4}$ din prima, este:

$$12000\times\frac{3}{4}=9000 \text{ lei.}$$

Capitalul care la depus la început, este deci:

$$12000+8000+9000=29000 \text{ lei.}$$

Au dat soluţiuni aritmetice diferite, d-nii: *Badin Leonida* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Deniş C-tin* (lic. Roman), *Gaciu Alexandru*, *Ivănescu Cezar* (absolvent, Bârlad), *Matei Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Mureşanu Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Siara I. Virgil* (lic. Milit., Tg-Mureş) *Soara I. Ilie* (lic. Milit., Tg-Mureş) şi *Vasu Nicolae* (lic. Milit., Tg-Mureş).

Soluţie algebrică. Fie x prima parte a capitalului împărţit. Conform enunţului, a doua parte este $\frac{2x}{3}$ iar a treia parte este $\frac{3x}{4}$. Prima parte x, dată cu $10^0/_0$, în 2 ani, aduce dobânda:

$$\frac{x\times 2\times 10}{100}=\frac{x}{5}$$

A doua parte, $\frac{2x}{3}$, dată cu $12^0/_0$, în 2 ani, aduce dobânda:

$$\frac{2x\times 2\times 12}{3\times 1000}=\frac{4x}{25}$$

A treia parte, $\frac{3x}{4}$, dată cu $15^0/_0$, în 2 ani, aduce dobânda:

$$\frac{3x\times 2\times 15}{4\times 100}=\frac{9x}{40}$$

Insumând capitalurile şi dobânzile respective, avem:

$$x+\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{4x}{25}+\frac{9x}{40}=$$

$$\frac{600x+400x+450x+120x+96x+135x}{600}=$$

$$\frac{1801x}{600}$$

Această sumă depusă pe 3 ani cu $20^0/_0$, aduce dobânda:

$$\frac{1801x\times 3\times 20}{600\times 100}=\frac{1801x}{1000}$$

Această dobândă, împreună cu capitalul care a produs'o, face 57632, rezultă deci că avem:

$$\frac{1801x}{600}+\frac{1801x}{1000}=57632$$

Aducând la forma întreagă, avem:

$$10\times 1801x+6\times 1801x=6000\times 57632$$

$$\therefore \quad 16\times 1801x=6000\times 57632$$

Deci:

$$x=\frac{6000\times 57632}{16\times 1801}=375\times 32=12000$$

Avem astfel prima parte $x=12000$ lei, a doua parte a capitalului iniţial este:

$$\frac{2x}{3}=\frac{2}{3}\times 12000=8000 \text{ lei,}$$

şi a treia parte este:

$$\frac{3x}{4}=\frac{3}{4}\times 12000=9000 \text{ lei.}$$

Capitalul depus la început a fost:

$$12000+8000+9000=29000 \text{ lei.}$$

Soluţii date de d-ra: *Naneş Cornelia* (Şc. Centrală, Bucureşti) şi de d-nii: *Anea I. Iuliu* (lic. Milit., Tg-Mures), *Boisnard* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Chiriac C-tin* (lic.

Milit. Iaşi), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru Marin* (lic. Milit., Craiova), *Deniş C-tin* (lic., Roman), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit., Tg.-Mureş, *Gheorghiu Alexandru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Ghiocel V. Vasile* (lic., Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Hascal I. Herman* (lic. Roman), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman), *Mazilu Panaite* (lic. Internat, Iaşi), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir (Bucureşti), *Mereuţă Emilian, Milea E.* (Sub-Lt) *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Nenciulescu H.* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Pănescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Popa Nicolae* (lic., Beiuş), *Porumbescu D.* (Tg.-Ocna), *Preda C. C-tin* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Racoţeanu Ion*, (lic. Milit., Craiova), *Stoica G. Ioan* (Sub-Lt.), *Schwartz N.* (lic. Botoşani). *Tenichi Alexandru* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Trică Ioan* (Constanţa) şi *Ţarălungă D.* (lic. Milit. Tg.-Mureş).

1109. — *Fie $f(x)$ o funcţiune continuă, având o derivată $f'(x)$.*

1°. *Să se arata că există trei numere reale a, b, c, cuprinse în intervalele:*

$$A < a < A+1 < b < A+2$$

$$A < c < A+2$$

(A fiind un număr real dat), astfel că avem:

$$f'(a)+f'(b)=2f'(c) \tag{1}$$

2°. *Dânduse:*

$$f(x)=x^3+x+1$$

şi $A=1$, *să se determine a, b, c, care să verifice relaţia* (1).

V. ALACI

1°. Vom folosi *teorema creşterilor finite*, al cărei enunţ este:

„Dacă funcţiunea $f(x)$ admite o derivată $f'(x)$ într'un interval, şi dacă α şi β sunt numere din acel interval, atunci există o valoare $x=\gamma$, cuprinsă între α şi β, astfel că avem“:

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma).$$

In virtutea acestei teoreme, considerând intervalele:

$$(A,\ A+1);\quad (A+1,\ A+2);\quad (A,\ A+2) \tag{2}$$

în care funcţiunea $f(x)$ admite o derivată $f'(x)$ ştim că există trei numere a, b, c cuprinse respectiv în intervalele (2), astfel că avem:

$$\frac{f(A+1)-f(A)}{1}=f'(a),\quad \frac{f(A+2)-f(A+1)}{1}=f'(b)$$

$$\frac{f(A+2)-f(A)}{2}=f'(c) \tag{3}$$

Adunând primele două relaţiuni şi ţinând seamă de a treia, deducem:

$$f'(a)+f'(b)=f(A+2)-f(A)=2f'(c)$$

Astfel relaţia (1) din enunţ este stabilită.

2°. In cazul particular:

$$f(x)=x^3+x+1, \qquad A=1,$$

avem:

$$f'(x)=3x^2+1,$$

iar relaţiile (3) devin:

$$3a^2+1=f(2)-f(1)=8$$

$$3b^2+1=f(3)-f(2)=20$$

$$3c^2+1=\frac{f(3)-f(1)}{2}=14,$$

care ne dau cu uşurinţă; ţinând seamă de intervalele în care sunt cuprinsi a, b, c:

$$a=\sqrt{\frac{7}{3}},\quad b=\sqrt{\frac{19}{3}},\quad c=\sqrt{\frac{13}{3}},$$

valori care verifică relaţia (1), care devine:

$$8+20=2\times 14.$$

Soluţii date de d-nii: *Curchi Ioan* (student, Bucureşti) *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit., de Artilerie), *Negrea A. Leonte Mircea* (licenţiat în Matematici) şi *Sămbotin Gh.* (Sub-Lt.)

Observare. Dl. Ivănescu Cezar (bacalaureat, Bârlad), a dat şi următoarele două generalizări:

1°. *Dacă $f(x)$ este o funcţiune continuă, admiţând o derivată $f'(x)$, există m numere reale $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ cuprinse în intervalele:*

$$A < a_1 < A+1 < a_2 < A+2 < \ldots < A+$$

$$m-2 < a_{m-1} < A+m-1$$

$$A < a_m < A+m-1,$$

(A *fiind un număr real dat, astfel ca:*

$$f'(a_1)+f''(a_2)+\ldots+f'(a_{m-1})=(m-1)f'(a_m).$$

Se urmează la fel ca în soluţia dată mai sus.

2°. *Dacă* $f(x)$ *este o funcţiune continuă şi admite o derivată* $f'(x)$, *există trei numere reale* a, b, c, *cuprinse în intervalele:*

$$A<a<A+p<b<A+q,$$

$$A<c<A+q$$

(A, p, q *fiind numere reale şi* $p<q$), *astfel ca:*

$$p\,f'(a)+(q-p)f'(b)=q\,f(c).$$

Demonstraţie analoagă cu cea dată mai sus.

PROBLEME PROPUSE

1161. — Trouver un carré parfait de six chiffres qui s'écrit $a\,b\,c\,d\,c\,d$.

V. THÉBAULT

1162. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x^{2m}+2a}{y^{2m}}+\dfrac{y^{2m}+2a}{x^{2m}}+1=0 \\ x^{2m}+y^{2m}+x^m y^m+b=0 \end{cases}$$

ION MARGINEANU

1163. — x fiind rădăcina ecuaţiei:

$$\frac{2p}{u^x}-\frac{p-1}{u^{m+2p}}=\sum_{i=o}^{p}\frac{1}{u^{m+2i}},$$

să se arate că:

$m<x<m+p-1$, pentru, $u>1$

$m+p<x<m+2p$, pentru, $0<u<1$

CONSTANTIN IONESCU BUJOR

1164. — Dacă avem polinomul:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_px^p$$

şi $f'(x)$, $f''(x),\ldots,f^{(p)}(x)$ sunt derivatele sale succesive, se cere să se stabilească relaţia:

$$a_k=\frac{f^{(k)}_{(a)}}{k!}-\Gamma^1_{k+1}\frac{f^{(k+1)}_{(a)}}{(k+1)!}a+\Gamma^2_{k+1}\frac{f^{(k+2)}_{(a)}}{(k+2)!}a^2-$$

$$\ldots+(-1)^{p-k}\Gamma^{p-k}_{k+1}\frac{f^{(p)}_{(a)}}{p!}a^{p-k},$$

unde, $k=0,1,2\ldots p$; a este număr oarecare, iar:

$$\Gamma^n_m=\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{n!}$$

V. ALACI

1165. — Să se afle maximul şi minimul funcţiunei:

$$z=x^2+y^0,$$

ştiind că variabilele x, y, satisfac relaţia:

$$x^2+4y^2-24y+20=0.$$

Să se dea şi o interpretare geometrică.

V. MIOC

1166. — Pe dreapta fixă Δ, se ia un punct fix M şi un punct oarecare N. Fie AB tangenta comună cercurilor oarecare O şi O' care trec prin punctele considerate. Se cere locul geometric al ortocentrului triunghiului ANB, A şi B fiind punctele de tangenţă.

IOAN I. SANDULESCU

1167. — Se dă triunghiul ABC, O centrul cercului circumscris şi dintr'un punct M oarecare de pe BC se duce o paralelă la AB, care taie tangenta din C la cercul O în P. Cercurile ABC şi MBC se taie a doua oară în N. Să se arate că punctele A, N, P sunt coliniare ori care ar fi M pe BC. Să se determine M astfel ca:

1°. Patrulaterul MCPO să fie înscriptibil.

2°. Centrul cercului MPC să fie pe cercul ABC.

SÜLI MIHAI

1168. — Să se dovedească că suma razelor cercurilor exînscrise unui triunghiu, este mai mare sau cel mult egală cu de nouă ori raza cercului înscris acelui triunghiu.

GH. LEOBEN VASILIU

INFORMAȚIUNI

LA REDACȚIA „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIȘOARA SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL V-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO

COSTUL UNUI ABONAMENT FIIND DE 300 LEI ȘI PENTRU ANUL AL III-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

COSTUL ABONAMENTULUI FIIND DE 125 LEI, PUBLICATE ÎN BUENOS AIRES; AMÂNDOUĂ 400 LEI

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XII. 15 FEBRUARIE 1932 NO. 12.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. D. V. IONESCU APLICATIUNI ALE CALCULUI VECTORIAL
2. NOTE MATEMATICE: 30.
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 1105, 1112.
5. PROBLEME PROPUSE: 1169-1176
6. TABLA DE MATERII.
7. INFORMATIUNI

TIMIȘOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Avem plăcerea a anunța că începând dela 15 Ianuarie 1933, mai face parte dintre membrii „Revistei Matematici din Timișoara“ și *D-l Constantin Ionescu Bujor*, licențiat în matematici, str. General Al Radovici 5, București III, fost corespondent distins al „Revistei“.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Școala Politechnică din Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XII inclusiv, broșate, 120 lei fiecare

---

Rugăm pe corespondenții noștrii, a trimite de urgență costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T.“ pe anul XIII, care începe la 15 Martie 1933.

ANUL XII — No 12. TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1933

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

APLICAȚIUNI ALE CALCULUI VECTORIAL

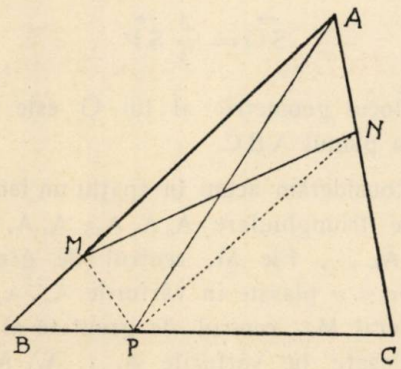
de D. V. IONESCU
PROFESOR LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE DIN CLUJ

In acest articol vreau să arăt câteva aplicațiuni ale calculului vectorial la probleme de geometrie.

1. Se știe că dacă într'un triunghiu ABC se iau pe laturile AB și AC, punctele M și N astfel ca:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{NC}{NA}=k,$$

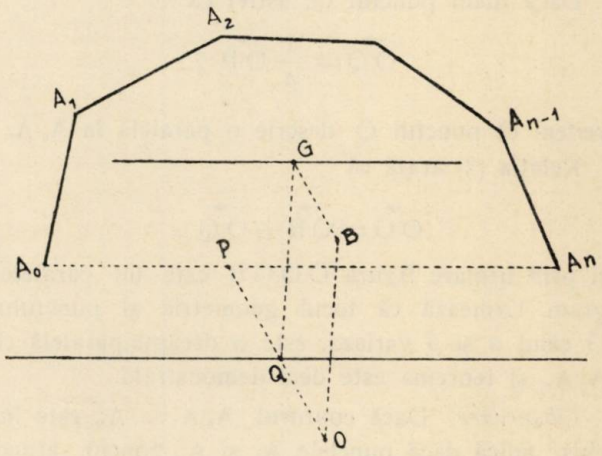
locul geometric al mijlocului segmentului MN, când k variază, este dreapta care unește mijloacele laturilor AB și AC.



Demonstrația acestei teoreme este foarte simplă, este suficient să se vadă că dacă pe BC se ia punctul P astfel ca $\frac{PC}{PB}=k$, figura $AMPN$ este un paralelogram și că mijlocul lui MN este mijlocul lui AP.

Voi generaliza în două moduri această teoremă.

2. Să considerăm o linie frântă $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ plană sau strâmbă. Notăm cu M_1, centrul de greutate al maselor α și β plasate în A_0 și A_1, și în general cu M_i centrul de greutate al maselor α și β plasate în A_{i-1} și A_i. Obținem astfel punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Să demonstrăm că *locul geometric al centrului de greutate* G *al maselor egale cu* 1 *plasate în* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *când* α *și* β *variază, este o dreaptă paralelă cu* A_0A_n.



Dacă luăm un punct fix O ca origină, vom avea:

$$\overrightarrow{OM_1}=\frac{\alpha\overrightarrow{OA_0}+\beta\overrightarrow{OA_1}}{\alpha+\beta}$$

$$(1)\qquad \overrightarrow{OM_2}=\frac{\alpha\overrightarrow{OA_1}+\beta\overrightarrow{OA_2}}{\alpha+\beta}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\overrightarrow{OM_n}=\frac{\alpha\overrightarrow{OA_{n-1}}+\beta\overrightarrow{OA_n}}{\alpha+\beta}$$

Centrul de greutate G al maselor egale cu 1 plasate în punctele $M_1, M_2, \ldots M_n$ este definit de:

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\ldots+\overrightarrow{OM_n}}{n}$$

Din formulele (1), deducem că:

$$(2)\quad \vec{OG}=\frac{\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\ldots+\vec{OA_{n-1}}}{n}+\frac{1}{n}\,\frac{\alpha\vec{OA_0}+\beta\vec{OA_n}}{\alpha+\beta}$$

Fie

$$\vec{OB}=\frac{\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\ldots\vec{OA_{n-1}}}{n}$$

şi

$$\vec{OP}=\frac{\alpha\vec{OA_0}+\beta\vec{OA_n}}{\alpha+\beta}$$

Punctul B e fix, iar când α şi β variază, punctul P descrie dreapta A_0A_n.

Dacă luăm punctul Q, astfel ca

$$\vec{OQ}=\frac{1}{n}\vec{OP}\ ,$$

vedem că punctul Q descrie o paralelă la A_0A_n.

Relaţia (2) arată că

$$\vec{OG}=\vec{OB}+\vec{OQ}\ ,$$

şi prin urmare figura OQGB este un paralelogram. Urmează că locul geometric al punctului G când α şi β variază, este o dreaptă paralelă cu A_0A_n şi teorema este deci demonstrată.

Observare. Dacă conturul $A_0A_1\ldots A_n$ este închis, adică dacă punctele A_0 şi A_n concid, atunci centrul de greutate G este fix şi coincide cu centrul de greutate al maselor plasate în vârfurile liniei frânte.

Intr'adevăr formula (2) arată că în acest caz avem:

$$\vec{OG}=\frac{\vec{OA_0}+\vec{OA_1}+\ldots+\vec{OA_{n-1}}}{n}$$

3. Să considerăm acum un tetraedru SABC. Fie M_1, M_2, M_3 centrele de greutate α,β,γ plasate respectiv în vârfurile S, B, C; A, S, C; A, B, S. Să demonstrăm că *locul geometric al centrului de greutate al maselor egale cu 1 plasate în* M_1, M_2, M_3, *când* α,β,γ *variază, este un plan paralel cu planul* ABC.

Luând pe S ca origină, punctele M_1, M_2, M_3 sunt definite de formulele:

$$\vec{SM_1}=\frac{\beta\vec{SB}+\gamma\vec{SC}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$(3)\quad \vec{SM_2}=\frac{\gamma\vec{SC}+\alpha\vec{SA}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\vec{SM_3}=\frac{\alpha\vec{SA}+\beta\vec{SB}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Centrul de greutate G este dat de:

$$\vec{SG}=\frac{\vec{SM_1}+\vec{SM_2}+\vec{SM_3}}{3}\ ,$$

şi ţinând seama de relaţiile (3), avem:

$$\vec{SG}=\frac{2}{3}\,\frac{\alpha\vec{SA}+\beta\vec{SB}+\gamma\vec{SC}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Insă punctul P definit de:

$$\vec{SP}=\frac{\alpha\vec{SA}+\beta\vec{SB}+\gamma\vec{SC}}{\alpha+\beta+\gamma}\ ,$$

este centrul de greutate al maselor α,β,γ plasate în punctele A, B, C; el se găseşte în planul ABC, şi egalitatea:

$$\vec{SG}=\frac{2}{3}\vec{SP}$$

arată că locul geometric al lui G este un plan paralel cu planul ABC.

4. Să considerăm acum în spaţiu un lanţ format din feţele triunghiulare $A_0A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_{n+1}$, Fie M_1 centrul de greutate al maselor α,β,γ plasate în vârfurile A_0, A_1, A_2, ... şi în general M_i, centrul de greutate al maselor α,β,γ plasate în vârfurile A_{i-1}, A_i, A_{i+1}. Se obţine astfel şirul de puncte M_1, M_2, ..., M_n. Să demonstrăm că *locul geometric al centrului de greutate* G *al maselor egale cu* 1, *plasate în* M_1, M_2, ... M_n *este in general un plan paralel cu* A_0A_n *şi* A_1A_{n+1}.

Luăm un punct O ca origină şi observăm că punctele M_1, M_2, ..., M_n sunt definite de ecuaţiile:

$$\vec{OM_1}=\frac{\alpha\vec{OA_0}+\beta\vec{OA_1}+\gamma\vec{OA_2}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\vec{OM}_2 = \frac{\alpha \vec{OA}_1 + \beta \vec{OA}_2 + \gamma \vec{OA}_3}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$\vec{OM}_3 = \frac{\alpha \vec{OA}_2 + \beta \vec{OA}_3 + \gamma \vec{OA}_4}{\alpha + \beta + \gamma}$$

. . . . . .

$$\vec{OM}_n = \frac{\alpha \vec{OA}_{n-1} + \beta \vec{OA}_n + \gamma \vec{OA}_{n+1}}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Centrul de greutate G este definit de ecuația:

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OM}_1 + \vec{OM}_2 + \ldots + \vec{OM}_n}{n},$$

și din formulele precedente deducem că:

$$(4) \qquad \vec{OG} = \frac{\vec{OA}_2 + \vec{OA}_3 + \ldots + \vec{OA}_{n-1}}{n} +$$

$$\frac{1}{n} \frac{\alpha \vec{OA}_0 + (\alpha + \beta) \vec{OA}_1 + (\beta + \gamma) \vec{OA}_n + \gamma \vec{OA}_{n+1}}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Să punem:

$$\vec{OB} = \frac{\vec{OA}_2 + \vec{OA}_3 + \ldots + \vec{OA}_{n-1}}{n}$$

$$\vec{OP} = \frac{\alpha \vec{OA}_0 + (\beta + \gamma) \vec{OA}_n}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$\vec{OQ} = \frac{(\alpha + \beta) \vec{OA}_1 + \gamma \vec{OA}_{n+1}}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Punctul B este fix. Când α, β și γ variază, punctul P descrie dreapta $A_0 A_n$, iar punctul Q descrie dreapta $A_1 A_{n+1}$.

Cu aceste notații putem scrie formula (4)

$$(5) \qquad \vec{OG} = \vec{OB} + \frac{2}{n} \frac{\vec{OP} + \vec{OQ}}{2}$$

Să punem încă:

$$\vec{OR} = \frac{\vec{OP} + \vec{OQ}}{2},$$

R este mijlocul lui PQ. Se știe că dacă punctul P descrie dreapta $A_0 A_n$ și punctul Q descrie dreapta $A_1 A_{n+1}$ atunci mijlocul lui PQ descrie un plan (T) paralel cu aceste drepte.

Rezultă că și punctul S definit de:

$$\vec{OS} = \frac{2}{n} \vec{OR},$$

va descrie tot un plan, paralel cu planul (T).

Ecuația (5) care se mai scrie:

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OS},$$

arată că figura O B G S este un paralelogram și prin urmare locul geometric al punctului G este un plan paralel cu planul (T).

5. Sunt cazuri de excepție când locul punctului G este o dreaptă, sau când G este fix.

1°. Dacă punctul A_1 coincide cu A_{n+1}, atunci formula (4) arată că:

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \ldots + \vec{OA}_{n-1}}{n} +$$

$$\frac{1}{n} \frac{\alpha \vec{OA}_0 + (\beta + \gamma) \vec{OA}_n}{\alpha + \beta + \gamma},$$

și același raționament ca mai sus, arată că G descrie, când α, β, γ variază o dreaptă paralelă cu $A_0 A_n$.

Dacă se ia $n = 3$, se obține un tetraedru $A_0 A_1 A_2 A_3$ și observarea precedentă conduce la următoarea teoremă.

Fie M_1, M_2, M_3 *centrele de greutate ale maselor* α, β, γ *plasate respectiv în* A_0, A_1, A_2; A_1, A_2, A_3; A_2, A_3, A_1. *Locul geometric al centrului de greutate al maselor egale cu 1, plasate în* M_1, M_2, M_3, *când* α, β, γ *variază este o dreaptă paralelă cu* $A_0 A_3$.

2°. Deasemenea dacă A_0 coincide cu A_n, se vede ușor că locul geometric al lui G este o dreaptă paralelă cu $A_1 A_{n+1}$.

3°. Dacă dreptele $A_0 A_n$, $A_1 A_{n+1}$ sunt paralele, locul geometric al lui G este o dreaptă paralelă cu aceste drepte.

Exemplu. Să considerăm piramida $A_2 A_0 A_1 A_4 A_3$, al cărui vârf este A_2 și a cărui bază este trapezul $A_0 A_1 A_4 A_3$. Scriind punctele în ordinea $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4$, deducem următoarea teoremă:

Fie M_1, M_2, M_3 *centrele de greutate ale maselor* α, β, γ *plasate respectiv în punctele* A_0, A_1, A_2; $A_1 A_2 A_3$; A_2, A_3, A_4. *Locul geometric al centru-*

lui de greutate al triunghiului $M_1 M_2 M_3$ *când* α, β, γ *variază, este o dreaptă paralelă cu* $A_0 A_3$.

4°. In fine să presupunem că punctele A_0, A_n coincid şi că punctele A_1, A_{n-1} coincid deasemenea. In acest caz ecuaţia (4) arată că:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_{n-1}}}{n}$$

şi prin urmare punctul G este fix, el coincizând cu centrul de greutate al maselor egale cu 1, plasate în $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$.

Acest din urmă caz, capătă o interpretarea interesantă în următorul enunţ.

Se consideră tetraedrul $A_0 A_1 A_2 A_3$ şi se notează cu M_1, M_2, M_3, M_4 centrele de greutate ale maselor α, β, γ plasate respectiv în punctele A_0, A_1, A_2; A_1, A_2, A_3; A_2, A_3, A_0; A_3, A_0, A_1.

Centrul de greutate al tetraedrului $M_1 M_2 M_3 M_4$ *coincide cu centrul de greutate al tetraedrului* $A_0 A_1 A_2 A_3$.

Pentru a dovedi aceasta, este suficient să se aplice consideraţiile precedente la şirul de puncte $A_0 A_1 A_2 A_3 A_0 A_1$.

NOTE MATEMATICE

30. — *Asupra unei probleme.*

In problema 1006 din „R. M. T." Anul XI, No. 4 se cerea:

Să se demonstreze că numărul:

$$N = 11\ldots11288\ldots8896,$$

care are n cifre egale cu 1 şi n — 1 egale cu 8, este patrat perfect.

In rândurile ce urmează imi propun să deduc de aci, că şi alte numere sunt patrate perfecte.

Numărul N (de $2n+2$ cifre) fiind patrat perfect, numerile 4 N, 9 N, 16 N etc., vor fi deasemenea pătrate perfecte:

Insă:

$$4N = \underbrace{44\ldots44}_{n-1}\,5\,1\,\underbrace{55\ldots584}_{n-1} \quad (2n+2) \text{ cifre}$$

$$9N = \underbrace{100\ldots00}_{n-1}\,1\,6\,\underbrace{00\ldots0064}_{n-1} \quad (2n+3) \text{ cifre}$$

$$16N = \underbrace{177\ldots77}_{n-2}\,8\,0\,6\,\underbrace{22\ldots22336}_{n-2} \quad (2n+3) \text{ cifre}$$

Şi în virtutea celor stabilite la rezolvarea problemei 1006 (R. M. T., vol. XI, No. 9) avem:

$$4N = \underbrace{66\ldots6672^2}_{n+1}$$

$$9N = \underbrace{100\ldots008^2}_{n+2}$$

$$16N = \underbrace{133\ldots344^2}_{n+2}$$

Numerile 25 N, 36 N, 49 N etc. fiind şi ele patrate perfecte, avem astfel o întreagă clasă de pătrate perfecte deduse din cele din problema 1006.

CEZAR IVANESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XXXVIII, No. 5, Ianuarie 1933. Orthopôle et théorème de *Droz-Farny*, par *V. Thébault.* Chestiuni din Geometria triunghiului, de *Miron Niculescu.* Asupra sirului lui Fibonacci, de *Ion B. Florescu.* Regulamentul fondului *„Spiru-Haret".* Regulamentul fondului *„Lt-Colonel Gh. A. Tănăsescu".*

2. *Boletin Matematico Elemental,* Ano III, No. 10, Diciembre de 1932, *Buenos Aires.* Asupra proprietăţilor celui mai mic comun multiplu, de *M. O. Gonzalez.*

3. *Revista Matematică* a elevilor Craioveni, an. I, No. 4—5. Cercul celor nouă puncte, de *Predoescu I. M.*

4. *N. Botea.* Sur quelques équations aux dérivées partielles. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 28 Novembre 1932).

PROBLEME REZOLVATE

1105. — *Pe un cerc se mişcă două mobile. Dacă merg în acelaşi sens se întâlnesc la fiecare 30 secunde, dacă merg în sens contrar se întâlnesc la fiecare 10 secunde. Care este viteza fiecărui mobil şi lungimea cercului, ştiind că dacă mergând în sens contrar şi plecând din două puncte la distanţa de 42 m., se vor găsi după 3 secunde la distanţa tot de 42 m.*

I. DUMITRIU-DADA

Fie v şi v_1 vitezele celor două mobile şi l lungimea cercului.

Ştiind că cele două mobile mergând în acelaşi sens se întâlnesc la fiecare 30 de secunde, putem scri:

$$(1) \qquad 30\,v - 30\,v_1 = l$$

Pentru cazul când merg în sens contrar, avem relaţia:

$$(2) \qquad 10\,v + 10\,v_1 = l$$

Ţinând încă seamă că cele două mobile plecând dela distanţa de 42 m, se vor găsi după 3 secunde la o aceiaşi distanţă, avem:

$$(3) \qquad 3\,v + 3\,v_1 + 84 = l$$

Avem deci de rezolvat sistemul, format de ecuaţiile (1), (2) şi (3), care se poate scri:

$$\begin{cases} v - v_1 = \dfrac{l}{30} \\ v + v_1 = \dfrac{l}{10} \\ v + v_1 + 28 = \dfrac{l}{3} \end{cases}$$

Comparând ultimele două ecuaţii deducem:

$$\frac{l}{10} + 28 = \frac{l}{3}$$

$$^{*}_{*}{}^{*} \qquad 10\,l - 3\,l = 840$$

De aci deducem:

$$l = 120 \text{ m.}$$

Inlocuind această valoare în primele două ecuaţii, obţinem:

$$\begin{cases} v - v_1 = 4 \\ v + v_1 = 12 \end{cases}$$

Prin adunare şi scădere găsim:

$$v = 8 \text{ m/s}$$
$$v_1 = 4 \text{ m/s}$$

Vitezele celor două mobile sunt 8 m şi 4 m pe secundă, iar lungimea cercului, 120 m.

Observare. Evident că drumul circular, poate fi înlocuit cu un drum închis convex, oarecare.

Soluţii date de d-nii: *Anastasescu Mihail* (lic. Tighina), *Băleanu D-tru* (Şc. Milit., de Artilerie), *Chiriac C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Constantin G. Petre* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Fofiu Corneliu* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Ioana L. Vasile* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Mehedinţi D.* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit., de Artilerie), *Margulius Marius* (Bucureşti), *Mazilu Panaite* (lic. Internat, Iaşi), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Millea A.* (Sub-Lt.), *Nenciulescu Hariton* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Procopiescu Mihai* (lic. Milit. Tg-Mureş), *Şandovici Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Sâmbătin Gh.* (Sub-Lt), *Stoica Ioan* (Sub-Lt), *Süli Mihai* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Ţigănescu D. Theodor* (lic. Milit., Tg-Mureş).

1112. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, se cere să se rezolve ecuaţia:*

$$r\,x^3 - p\,x^2 + (4\,R + r)\,x - p = 0$$

Folosim următoarele formule cunoscute într'un triunghiu:

$$s = p\,r = r^2 \cot\frac{A}{2} \cot\frac{B}{2} \cot\frac{C}{2}$$

$$\cot\frac{A}{2} \cot\frac{B}{2} \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}$$

$$r_a + r_b + r_c - r = 4\,R,$$

$$p = r_a \cot\frac{A}{2} = r_b \cot\frac{B}{2} = r_c \cot\frac{C}{2}$$

(Compléments de Trigonométrie, par „F. G. M", p. 175, 181, 177, 70.)

De aci deducem cu uşurinţă:

$$(1) \qquad \cot\frac{A}{2} \cot\frac{B}{2} \cot\frac{C}{2} = \frac{p}{r}$$

$$(2) \qquad \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \frac{p}{r}$$

$$\frac{4\,R + r}{r} = \frac{r_a + r_b + r_c}{r} =$$

$$\frac{p}{r}\left(\frac{1}{\cot\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{A}{2}}\right) =$$

$$\frac{p}{r} \cdot \frac{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}$$

Ţinând seamă de relaţia (1), deducem:

$$(3) \qquad \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2} = \frac{4\,R + r}{r}$$

Relaţiile (2), (3) şi (1) ne dau respectiv suma lui, $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$, suma produselor lor luate câte două şi produsul lor.

Ecuaţia care admite deci ca rădăcini pe: $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$, este:

$$x^3 - \frac{p}{r}x^2 + \frac{4R+r}{r}x - \frac{p}{r} = 0$$

sau:

$$rx^3 - px^2 + (4R+r)x - p = 0\,,$$

adică tocmai ecuaţia dată.

Rezultă de aci, că rădăcinele ecuaţiei date sunt:

$$\cot\frac{A}{2},\ \cot\frac{B}{2},\ \cot\frac{C}{2}.$$

Soluţii date de dnii: *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru Marin* (lic. Milit., Craiova), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Dima A. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Margulius Marius* (Bucureşti), *Milea S. E.* (Sub-Lt), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Negrea A. Leonte Mircea* (licenţiat în Matematici), *Pănescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Popa Gh. Ioan* (Bucureşti), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Sămbotin Gh.* (Sub-Lt.), *Süli Mihai* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Vasiliu Leoben Gh.* (Inginer).

PROBLEME PROPUSE

1169. — Să se demonstreze că oricare ar fi p întreg pozitiv, expresia:

$$3^{4p+2} + 2 \times 4^{3p+1}$$

este divizibilă prin 17.

MARIN I. PREDOESCU

1170. — Să se găsească forma generală a numerelor x şi y ştiind că una din sumele:

$$x^2 \pm y^3 \quad \text{sau} \quad x^3 \pm y^2\,,$$

este patratul sumei sau diferenţei numerilor x şi y.

COL. GH. BUICLIU

1171. — Să se afle divizorii polinomului:

$$x^{4m} + x^{4m-2}y^2 + \ldots + x^2 y^{4m-2} + y^{4m}$$

ION MARGINEANU

1172. — Să se determine a şi b $(0 < a < b)$, astfel ca ecuaţiunile:

$$x^3 - a x^2 - 243\,x + a^2 b = 0$$

$$x^3 + (1 + 8\sqrt{3})\,x^2 + (8\sqrt{3} - 27)\,x - 27 = 0\,,$$

să admită două rădăcini comune şi în acest caz să se rezolve.

NICOLAE V. PAUN

1173. Sunt date trei puncte A, B, C pe un cerc O. Să se construiască numai cu linia triunghiul circumscris cercului, cu punctele de tangenţă în A, B şi C, fără a utiliza centrul O al cercului.

IOAN B. POPA

1174. — Prin picioarele bisectoarelor interioare ale triunghiului de referinţă se duc paralele laturilor respective ale triunghiului ortic.

Centrele cercurilor circumscrise celor trei triunghiuri formate din câte una din paralele construite şi laturile triunghiului de referinţă alăturate bisectoarei corespunzătoare, împreună cu centrul circumscris triunghiului de referinţă, sunt pe un cerc concentric cu cercul înscris triunghiului de referinţă.

CONSTANTIN IONESCU BUJOR

1175. — Să se stabilească identitatea:

$$\sin 9t - 3\sin 7t + 3\sin 5t - 2\sin 3t + 3\sin t = 4\sin^3 t\,(1 - 2\cos 6t)$$

V. ALACI

1176. — Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească identitatea:

$$\sum (r_a - r_b)^3 = 3\,\frac{p}{r}\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$$

S-LT. IOAN C. SAVIN

Erată. In problema 1165 din No. 11 c. se va scrie:

$$z = x^2 + y^2\,,$$

în loc de:

$$z = x^2 + y^0\,.$$

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE.

a) Aritmetică

		Pag.
Col. Gh. Buicliu	Soluția generală a problemei 518	97

b) Geometrie

S-Lt I. Gh. Zamfirescu	Proprietăți în legătură cu anti-centrul patrulaterelor înscriptibile	3
N. N. Mihăileanu	Câteva proprietăți în legătură cu cercurile tritangente . .	13
D. V. Ionescu	Asupra unui loc geometric . .	49
V. Thébault	Sphéres remarquables du tetraèdre	73
Capt. Gh. Niculescu	Asupra triunghiurilor de laturi inverse	85
V. Thébault	Sur le triangle isoscèle . . .	99
Al. Niculescu	Asupra dreptei lui Simson[1]) .	121

c) Mecanică

D. V. Ionescu	Metodă pentru determinarea centrelor de greutate . . .	25
D. V. Ionescu	Generalizarea unui probleme a lui Newton	74
D. V. Ionescu	Câteva aplicațiuni ale teoremelor lui Guldin	100
D. V. Ionescu	Aplicațiuni ale calcului Vectorial	133

d) Geometrie diferențială

D. V. Ionescu	Desfășurate succesive	110

e) Filozofie matematică

N. O. Zaharia	Note pe marginea filozofiei lui Newton	37

f) Biografie

N. O. Zaharia	Henri Poincaré	62

Diverse

	Lista Comitetului Revistei . .	1—2
Observare.	Complectarea problemei 1101	48
„	Rectificarea problemei 1147 V. XII.	120

II. NOTE MATEMATICE

1. **I. Mărgineanu**	Expresiunea elementelor unui triunghiu în funcție de razele cercurilor exînscrise . . .	6
2. **N. N. Mihăileanu**	Câteva relații în legătură cu cercurile tritangente	7
3. **C. Ivănescu**	Câteva identități trigonometrice stabilite cu ajutorul determinanților	16
4. **S-Lt Zamfirescu**	Asupra problemei 514 . . .	18
5. **M. Grünbaum**	Asupra teoremei lui Noyer-Droz-Farny	28
6. **Em. Mereuță**	Asupra problemei 941 . . .	29
7. **I. Dumitriu-Dada**	De ce Paștele ortodox a fost la 1 Mai	42
8. **Col. Gh. Buicliu**	Resturile diviziunei lui A^m prin p	43
9. **Col. Gh. Buicliu**	Generalizarea problemei 156 .	50
10. **S-Lt Zamfirescu**	Asupra problemei lui Appolonius	51
11. **V. Claudian**	Asupra unei probleme de geometrie diferențiala	52
12. **V. Claudian**	Asupra ariei trapezului . . .	67
13. **V. Boeriu**	Determinarea unui polinom, îndeplinind anumite condiții .	68
14. **V. Thébault**	Sur le cercle orthogonal à trois cercles donnés	75
15. **Col. Gh. Buicliu**	Problema 1063	76
16. **S-Lt. I. C. Savin**	Asupra problemei 1034 . . .	77
17. **C. Ivănescu**	O metodă pentru stabilirea unor identități trigonometrice . .	78
18. **N. O. Zahariu**	Petru Sergescu Gândirea Matematică	87
19. **P. V. Cazanacli**	Desore semnele + și — . .	88
20. **S-Lt. I. C. Savin**	Asupra problemei 940 . . .	89
21. **Col. Gh. Buicliu**	Asupra notei 15	90
22. **P. V. Cazanacli**	Semnele înmulțirei și ale împărțirei	101
23. **C. Ivănescu**	Asupra problemei 1027 . . .	102
24. **P. V. Cazanacli**	Semnele ridicărei la putere și extrageri de rădăcini . . .	112
25. **S-Lt I. C. Savin**	Asupra problemei 932 din R.M.T.	113
26. **C. Coșniță**	Asupra unei probleme de mecanică	113
27. **P. V. Cazanacli**	Semnele de relațiune	122
28. **I. I. Săndulescu**	Trei puncte remarcabile într'un triunghiu	124
29. **C. Ivănescu**	Generalizarea problemei 1073 din R. M. T.	126
30. **C. Ivănescu**	Asupra unei probleme . . .	136

[1]) Din eroare de culegere la pag. 121, s-a imprimat *Simpson* în loc de *Simson*.

III. BIBLIOGRAFII

N. Abramesco	Le mouvement d'une figure plane variable qui reste semblable à elle même . . .	8
Annali della R. Scouala Normale superiore di Pisa		43
R. Bădescu	Sur le troisiéme théorème de Fredholm relatif à une equation intégrale particulière .	8
Boletin Matematico	. . . . 8, 18, 30, 43, 115,	127
Boletin Matematico Elemental	8, 44, 53, 115, 127,	136
N. Botea	Sur la généralisation d'un théoréme de lord Kelvin . . .	104
N. Botea	Sur quelques équations aux dérivées partielles	136
S. Braun & W. Sierpinski	Sur quelques propositions équivalentes à l'hypothèse du continu	44
Broșură de 16 pagini	. . . . .	30
Bulletin de Mathématique et de Physique pures et appliquées	 43,	114
N. Ciorănescu	Sur la sommation des séries trigonometriques	41
N. Ciorănescu	Sur l'intégration des équations differentielles lineaires avec les conditions initiales linéaires les plus générales . .	44
S. I. Costeanu	Mesures des forces électromotrices dans l'ammoniac liquide	115
Dare de seamă	asupra activității pe anul școlar 1931—32 a „Societății de Matematici a liceului Tasse Dumitrescu" din Mizil .	53
Dr. Ing. G. Garcio	La mécanica clasica y la explicacion	104
Spiridon Ghițescu	Problema lui Bayess	44
Gazeta Matematica	8, 18, 30, 43, 53, 69, 79, 90, 114, 127,	136
I. Kelemen	Introduction à la gèometrie	

		Pag.
	Euclidienne du monde á 4 dimensions	8
Corneliu Miklosi	Sur l'essai des courrois de commande	30
Corneliu Miklosi	Despre transmiterea mişcărei de rotaţie prin curele şi angrenaje	30
Corneliu Miklosi	Rolul metalelor în uzinele electrice moderne	30
Cpt. V. Nestorescu	Nomografie artileristică . . .	104
Cpt. V. Nestorescu şi Cpt. St. Negoescu	Algebra elementară şi superioară teoretică şi aplicată	104
O. Nikodym	Sur les fonctions d'ensembles	44
O. Nikodym	Sur les suites de fonctions parfaitement additives d'ensembles abstraits	44
O. Nikodym	Sur le fondement des raisonements locaux de l'analyse classique	44
R. Nogués	Théorème de Fermat, son histoire	44
Al. Pantazi	Sur certaines propriétés projectives des familles de surfaces	44
Revista Brasiliera	. . . . .	8
Revista de Ciencias	 43,	114
Revista Matematică	a elevilor Craioveni . . 115,	136
A. Rosenblatt	Sur les mouvements voisins des mouvements radiaux plans des liquides visqueux incompressible	53
A. Toussaint	Reflexions mathématiques . .	8
„Vlăstarul“, revistă literară şi ştiinţifică a liceului Spiru Haret, anul VIII, N-rele 5, 6 şi 7		53
G. Vrănceanu	Parallelisme et courbure dans une variété non holonome .	
G. Vrănceanu	Sur le calcul différentiel absolu des congruences	19
G. Vrănceanu	Sur quelques points de la théorie des espaces non holonomes	19

IV. CHESTIUNI DE EXAMEN

Şcoala Politecnică, Timişoara. Matematici generale anul pregătitor (sesiunea Iunie 1932) 53

Şcoala Politecnică, Timişoara. Examenul de admitere în anul pregătitor, Octomvrie 1932 . . . 103

V. INFORMAŢIUNI

VI. PROBLEME REZOLVATE ŞI PROPUSE

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XII. Problemelor care nu au nimic publicat în coloana 4) nu li-sa publicat soluţia.

1).	2).	3).	4).
42	94	I.	
50	110	„	
54	126	„	
69	142	„	
88	174	„	
91	187	„	
92	187	„	
98	187	„	
99	187	„	
100	14	II.	
109	14	„	
110	14	„	
114	30	„	
121	30	„	
124	46	„	
140	62	„	
141	62	„	
150	78	„	104
154	78	„	
156	94	II.	44
157	94	„	44
161	94	„	54
162	94	„	54
163	94	„	55
164	94	„	
165	94	„	
174	110	„	
175	110	„	
176	126	„	
178	126	„	
184	126	„	
185	126	„	
186	142	„	
191	142	„	
194	142	„	
195	142	„	
199	158	„	
206	174	„	
217	185	„	
230	14	III.	
235	30	„	
243	46	„	
244	46	„	
248	46	„	
253	62	„	
255	62	„	
259	62	„	
264	78	„	
268	78	„	
275	94	„	
289	126	„	
291	126	„	
296	142	„	
299	142	„	
310	174	„	
313	174	„	
315	174	„	
317	174	„	
319	185	„	
334	14	IV.	
335	14	„	
336	14	„	
343	30	„	
344	30	„	
345	30	„	
347	46	„	
357	62	„	
359	62	„	
361	78	„	
369	94	„	
376	94	„	
382	110	„	
390	126	„	
393	126	„	
401	142	IV.	
406	158	„	
407	158	„	
411	158	„	
414	174	„	
418	174	„	
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V.	
440	30	„	
442	30	„	30
444	30	„	
445	46	„	
450	46	„	
458	62	„	
460	62	„	
462	62	„	
478	94	„	
479	94	„	
481	110	„	
485	110	„	30
489	126	„	
507	158	„	
514	174	„	8
515	174	„	19
516	174	„	
518	190	„	9
519	190	„	
524	190	„	
527	14	VI.	
528	14	„	
531	14	„	
	122	IX.	
535	30	VI.	
537	30	„	31
541	46	„	
542	46	„	
543	46	„	
544	46	„	32
548	46	„	
550	62	„	
557	78	„	
558	78	„	
562	78	„	
569	94	„	
606	174	„	
608	174	„	
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
622	22	VII.	
628	38	„	
	118	„	
634	54	„	
635	54	„	

1).	2).	3).	4).
639	54	VII.	
646	70	„	
649	86	„	
654	102	„	
656	102	„	
657	102	„	
658	102	„	
667	134	„	
686	134	„	
695	190	„	
753	110	VIII.	
762	126	„	
766	126	„	
769	142	„	
772	142	„	
782	174	„	
794	190	„	
813	36	IX.	
823	48	„	
832	60	„	
847	84	„	
851	96	„	
853	96	„	
858	108	„	
860	108	„	
863	108	„	
867	122	„	
879	144	„	
882	144	„	
889	12	X.	
898	24	„	
908	36	„	
916	48	„	
917	48	„	
923	60	„	
924	60	„	
929	72	„	
938	84	„	
939	84	„	
951	107	„	
953	107	„	
954	108	„	
956	108	„	
961	120	„	
963	120	„	56
971	132	„	
971 bis	132	„	
974	138	„	
979	138	„	
982	12	XI.	
984	12	„	
989	24	„	
992	24	„	
993	24	„	
1000	36	„	

1).	2).	3).	4).
1001	36	XI.	
1002	36	„	
1004	36	„	
1008	48	„	
1009	48	„	
1012	48	„	
1013	60	„	10
1017	60	„	
1018	60	„	
1023	72	„	
1026	72	„	19
1027	72	„	
1028	72	„	20
1029	72	„	10
1030	72	„	11
1031	84	„	20
1032	84	„	21
1033	84	„	
1034	84	„	21
1035	84	„	
1036	84	„	
1037	84	„	
1038	84	„	22
1039	96	„	23
1040	96	„	33
1041	96	„	23
1042	96	„	33
1043	96	„	
1044	96	„	
1045	96	„	34
1046	96	„	
1047	108	„	34
1048	108	„	35
1049	108	„	45
1050	108	„	45
1051	108	„	79
1052	108	„	
1053	108	„	46
1054	108	„	47
1055	120	„	56
1056	120	„	57
1057	120	„	58
1058	120	„	70
1059	120	„	
1060	120	„	
1061	120	„	80
1062	120	„	59
1063	132	„	59
1064	132	„	71
1065	132	„	72
1066	132	„	81
1067	132	„	
1068	132	„	
1069	132	„	82
1070	132	„	83

1).	2).	3).	4).
1071	138	XI.	90
1072	138	„	91
1073	138	„	91
1074	138	„	92
1075	138	„	92
1076	138	„	
1077	138	„	
1078	138	„	93
1079	12	XII.	
1080	12	„	94
1081	12	„	
1082	12	„	95
1083	12	„	
1084	12	„	
1085	12	„	
1086	12	„	95
1087	12	„	105
1088	24	„	105
1089	24	„	106
1090	24	„	107
1091	24	„	115
1092	24	„	
1093	24	„	
1094	24	„	116
1095	24	„	118
1096	36	„	118
1097	36	„	119
1098	36	„	
1099	36	„	
1100	36	„	
1101	36	„	
	48	„	
1102	36	„	127
1103	36	„	
1104	47	„	129
1105	48	„	136
1106	48	„	
1107	48	„	
1108	48	„	
1109	48	„	131
1110	48	„	
1111	48	„	119
1112	48	„	137
1113	60	„	
1114	60	„	
1115	60	„	
1116	60	„	
1117	60	„	
1118	60	„	
1119	60	„	
1120	60	„	
1121	72	„	
1122	72	„	
1123	72	„	
1124	72	„	

1).	2).	3).	4).
1125	72	XII.	
1126	72	„	
1127	72	„	
1128	72	„	
1129	84	„	
1130	84	„	
1131	84	„	
1132	84	„	
1133	84	„	
1134	84	„	
1135	84	„	
1136	84	„	
1137	96	„	
1138	96	„	
1139	96	„	
1140	96	„	
1141	96	„	
1142	96	„	
1143	96	„	
1144	96	„	
1145	108	„	
1146	108	„	
1147	108	„	
	120	„	
1148	108	„	
1149	108	„	
1150	108	„	
1151	108	„	
1152	108	„	
1153	120	„	
1154	120	„	
1155	120	„	
1156	120	„	
1157	120	„	
1158	120	„	
1159	120	„	
1160	120	„	
1161	132	„	
1162	132	„	
1163	132	„	
1164	132	„	
1165	132	„	
1166	132	„	
1167	132	„	
1168	132	„	
1169	138	„	
1170	138	„	
1171	138	„	
1172	138	„	
1173	138	„	
1174	138	„	
1175	138	„	
1176	138	„	

TABLOUL NUMELOR[1]

Abason E, 1, 43, 114.
Abel, 63.
Abramescu M. D-ra, 45, 46, 47, 80.
Abramescu N, 1, 8, 99.
Acikgheozian N., 11, 20, 21, 22, 23, 33, 34, 36, 45, 46, 47, 59, 60, 70, 81, 82, 92, 93, 94.
Adam I M., 44, 54, 56.
Adam D. R., 1.
Adamescu M, 1.
Ahmes, 122.
Alaci V., 1, 3, 10, 11, 12, 13, 16, 24, 25, 30, 32, 34, 36, 37, 45, 48, 49, 60, 61, 70, 72, 73, 82, 84, 85, 91, 96, 97, 108, 109, 116, 120, 121, 131, 132, 133, 138.
Albeaţă E., 9.
Alcan F., 41.
Alencar A., 8.
Alexandrescu M., 56.
Amărăscu O. G., 44.
Anastasescu M, 118, 119. 137,
Anastasiadi I., 1
Andronescu P., 1.
Anea I. I., 130.
Angelescu A. 1, 18, 55.
Angelescu N. Tr., 54, 56.
Angheluţă Th., 1, 69, 70.
Anguita F., 44.
Aniţescu N., 91, 92, 94.
Antonescu N., 119.
Antoniu *V.*, 32.
Apostol Gh. V., 107.
Apostolescu R., 20.
Appolonius, 51.
Arbter E., 46.
Arcadian N., 44.
Ardeleanu Şt., 1.
Arghir I, 1.
Arhire D. V., 107.
Arsene A., 32, 44.
Atanasiu C., 32, 54.
Atanasiu I D., 44, 56.

Bădescu R., 8, 69.
Badin L, 130.
Baidaf I. B., 8, 18, 44, 115. 127.
Bakony C., 1.
Balasz D., 1.
Bălean G, 54, 56.
Băleanu D., 106, 107, 116, 119, 137.
Bănărescu M., 1.
Banciu I., 1
Barbilian D., 114.
Barbilion L, 115.
Bărgăzan A., 1.
Barisien N. E, 16.
Baron C., 1
Barrow, 123.
Bârs D. P, 31. 32.
Bayess 44.
Bedron I, 119.
Beju Tr., 54.
Beldie N. D., 54, 56.
Bell Cl., 127.
Bercea Cl., 119.
Bercovici A. E., 54, 56.
Berdan C., 44, 54, 55, 56, 105.
Bergson, 87.
Bhaskara, 88.
Bianu B, 114.
Biernacki M., 69.
Biletchi M., 119.
Blănaru V., 120
Blasko B. D-ra, 30.
Blaşian *V.*, 1.
Blumenfeld M. D., 44, 54.
Bobârnac M, 1.
Bobârnac C. M, 54, 55, 56, 105.
Boerescu P. G., 20, 21, 22, 24, 34, 35, 60, 71, 82, 91, 92, 120.
Boeriu P. Gh., 33.
Boeriu V., 10. 20, 22, 35, 36, 45, 46, 69.
Boisnard I., 120, 130.
Bolgiu O. O., 56.
Bolylai, 65.
Bombelli, 112, 123.
Borel E, 61.
Borel M., 69.
Potea G. N., 14, 19, 31, 56, 70, 79, 104, 127, 136.
Botez M, 1
Bougner P., 123.
Bouligand G., 70.
Boutroux E., 61.
Boutroux P., 61. 87.
Brăileanu Al., 56.
Brande L, 109, 111.
Bratu Gh, 1.
Braun S., 44.
Breazu D, 1
Breazu M. M., 10, 20.
Buhanca I., 120.
Buicliu Gh., 1, 12, 13, 18, 43, 44, 48, 51, 77, 90, 97, 108, 127, 138.
Bunescu A., 90.
Buridan, 87.
Bușilă A. A., 44.
Bușilă I., 90.
Bustamante D., 30.
Buteo, 112, 123.

Cabrera La Rosa A., 115.
Cajory Fl., 88, 89, 101, 102.
Călin M. Gh., 32.
Câlniceanu C., 1.
Câlniceanu Gh., 32.
Călugăreanu G., 46, 69, 70, 127.
Capoulade J., 70.
Cândea C., 1.
Capriel H., 127.
Cardan, 112, 113, 123.
Carnot, 5, 6, 13.
Catona V., 1.
Cazanacli V. P., 89, 102, 113, 124.
Căzănescu G. E., 120.
Cazelles E., 41.
Ceauşescu *V.*, 118, 119.
Chagas de Oliveiru E., 8.
Chiriac C., 118, 119, 120, 130, 137.
Chiriac I, 30.
Chircă I. M., 20, 22, 23, 35, 45, 46, 81
Chirilă A., 35, 46, 60, 71.
Chirnoagă E, 43, 114.
Chuquet, 112.
Ciani E, 43.
Ciobanu E., 45, 46. 47.
Cioclov Gh. Gh., 32.
Ciorănescu I. C., 44, 54.
Ciorănescu N., 8, 41, 70.
Ciupercă N. M, 20.
Ciută G., 54.
Civita T. L, 43.
Claudian V., 48, 53, 68, 72, 129.
Clavrus, 123.
Coandă I. V., 20, 22, 23, 34, 35, 45, 46, 47, 59, 60, 71, 82, 91, 92, 93, 94, 95, 105, 106, 107, 116, 118, 119, 120, 129, 131, 138.
Coca A., 1.
Cocorandu M., 44.
Coculescu N, 42.
Cojocaru M. M, 70, 71, 82, 91, 92, 93, 94, 95, 105, 106, 107, 116, 118, 119, 120, 129, 131, 138.
Coman A., 1, 12, 120.
Constantin Cel Mare, 42.
Constantin G P., 34, 35, 59, 91, 92.
Constantinescu Gh., 1, 8, 9.
Constantinescu I., 43.
Constantinescu Mircea, 34, 90.
Conta V., 121.
Contrea A., 1.
Coşereanu I., 44, 54, 55, 56, 105.
Coşniţă C., 15, 20, 24, 32, 47, 72, 84, 96, 107, 114.
Costăchescu D. C, 1.
Costăchescu V C., 32.
Costeanu I. S., 115.
Crăciunescu N. E., 32.
Crăciunescu I., 31.
Craiu N. I, 32.
Cristali Gh., 92, 93.
Cristolopol C. I., 10.
Cristescu I, 1.
Cristescu Potlogi I., 10.
Cristescu V., 3. 127.
Cristodulo N, 1.
Crivăţ Al, 16.
Cserveny I., 1.
Curchi I., 20, 22, 23, 24, 34, 46, 47, 58, 59, 81, 84, 91, 92, 93, 94, 95 96, 107, 108, 115, 118, 120, 129, 131.

Dan P. Tr., 22, 33, 34, 35, 45, 45, 81 83, 91, 92, 93, 94.
Dan T. Tr., 20, 21, 23, 24, 60, 71, 72, 82, 84, 92, 95, 106, 107, 116, 118, 120.
Dănciulescu Gr. V., 30, 32.
Dângă S. V., 46, 60, 71, 72, 82, 83.
Dărmănescu I., 31.
Dăscălescu St. H., 11, 20, 21, 22, 23, 33, 34, 35, 46, 92, 93.
David Gh., 56.
David H. I., 19.

1) Numerele care urmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

Demetrescu Gh., 1.
Deniș C., 106, 118, 130, 131.
Descartes, 38, 39, 88, 112, 123.
Diaconescu N., 1.
Diaconescu V. T., 32.
Dima A. Gh., 94, 95, 138.
Dima D. Gh., 94, 95, 120.
Dimitriu Gh. C., 20, 21, 22, 23.
Dini A. I., 60, 82, 91, 93.
Diofante, 89, 123.
Dobos E., 33, 34.
Dobrescu Băbici, 44, 56.
Dobrescu St., 21, 30, 44, 60, 71, 82
Dordea Tr., 8, 44, 102.
Dospinoiu N., 44.
Drăgan G., 32.
Drăgan I., 46, 60, 71, 72, 82, 83.
Dragomir N. I., 56.
Drâmbă N. C., 32.
Droz, 28, 29, 136
Dumitrașcu N. R., 11, 12, 20, 22, 45, 46, 47, 105.
Dumitrescu I. E, 19, 32.
Dumitrescu G. I., 15.
Dumitrescu Gh. M., 44.
Dumitrescu Tasse, 53.
Dumitriu-Dada I., 1, 12, 23, 24, 43, 48, 60, 72, 80, 92, 94, 106, 136.
Dumitru Z., 47, 81, 82.
Duport G., 32.

Einstein, 64.
Euclide, 38, 39, 65, 66.
Euler, 5, 7, 13, 15, 29, 83, 121, 122.

Fabius D. D-ra, 92.
Faibovici H., 32.
Farca N., 120.
Farny, 28, 29.
Fay, 8.
Fayon A., 32.
Fejer L., 43.
Fermat, 44.
„F. G. M.", 137.
Fibonacci, 30, 89, 123.
Flammarion E, 63, 64.
Flaubert, 41.
Flickstein I., 44, 54, 56.
Florea C. A., 44.
Florea N. Gh., 32.
Florescu B. I., 30, 136.
Florescu M., 1.
Focșeneanu I. M., 44, 56.
Fofiu C., 20, 21, 22, 23, 34, 45, 46, 58, 59, 60, 71, 72, 81, 82, 83, 84, 91, 92, 93, 94, 95, 105, 106, 107, 116, 118, 119, 120, 129, 137.
Fotino Sc., 114.
Frătici I., 1.
Fredholm, 8, 69.

Gabrielescu V., 54.
Gaciu Al., 130.
Gall T., 20, 21.
Galois, 89.
Garcia G, 43, 104, 114.
Georgescu C., 54, 71.
Georgescu D., 1.
Georgescu E. Fl., 44, 54, 56.
Georgescu T., 44.
Feorgescu I. N. V., 54, 55, 56.
Gergonne, 13.
Germay I. H. R., 70.
Ghaligai, 102, 112.
Gheorghe V., 20, 21, 45, 46, 60, 71, 82, 91, 92, 94, 95, 107, 118, 119, 131.
Gheorghiu Al., 107, 131.
Gheorghiu Th. Gh., 32, 33, 44, 54, 56, 105.
Gheorghiu Gh. L., 56.
Gheorghiu Victor, 33.
Ghermănescu M., 1.
Gheție C, 34, 92.
Ghimicescu I. Gh., 54.
Ghiocel V. V., 59, 60, 71, 82, 91, 92, 93, 95, 105, 106, 107, 116, 118, 119, 120, 131, 137, 138.
Ghișoiu I. P., 33, 54.
Chițescu Virg., 44.
Giota V., 56.
Girard A., 112, 123.
Godeanu I. V., 94, 95, 106, 107, 116, 118, 119, 120, 129, 131.
Goilav P. Cr., 55.
Gouzales O. M., 136.
Goormaghtigh Gh. R., 28, 29, 30, 43, 121.
Gosselin, 112.
Grabovschi E., 56.
Grigorescu D, 60, 71.
Grinberg N. M., 10, 20, 21, 22, 23, 29, 34, 36, 45, 46.
Grofșoreanu I. Gh., 44, 54, 105.
Grünbaum M, 29.
Guldin, 100, 101.

Haret Sp., 53 136.
Harriot T., 102, 112, 123.
Harth E., 56.
Hartmann I, 18.
Hascal I. H., 119, 131.
Heaviside, 43.
Herigone P., 112, 123.
Hoeche Van der, 89, 112.
Hopital, 104.
Hontopan A. D-ra, 80, 92, 95, 105.
Hristea H., 1.

Iacob St. E., 33, 54, 56.
Iancu D, 32.
Ianculescu O., 56.
Ilie C. I, 20, 22, 34, 45, 46, 47, 59, 71, 81, 82, 91, 92, 95, 116, 119, 120, 131, 137.
Ioana I. V., 137.
Ilie I. S, 92.
Iliescu M E., 20, 22, 44, 45, 46.
Iliescu Gh., 90.
Iliescu I. O., 94, 95.
Iliescu Tr. O., 95.
Iliescu T. T., 54.
Ioachimescu G. A., 43.
Ioana I. V., 137.
Ioanin C. Gh., 20, 21, 22, 23, 24, 34, 35, 45, 46, 80.
Ionescu I. Brezuica, 44.
Ionescu-Bujor T. C., 8, 13, 33, 48, 132, 138
Ionescu H, 44, 56.
Ionescu I., 43, 114.
Ionescu I. L., 44.
Ionescu I P., 44, 54.
Ionescu D. V., 25, 49, 69, 74, 100, 109, 133.
Iordache N. I., 56.
Iorgulescu T., 1.
Ivănescu C., 10, 12, 18, 20, 21, 23, 24, 33, 34, 35, 36, 45, 46, 47, 48, 56, 58, 59, 60, 71, 72, 79, 81, 82, 83, 84, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 103, 105, 107, 116, 117, 118, 119, 120, 127, 130, 131, 136, 137.

Jacobi, 63, 70.
Jeba C. C., 12.

Karamata J., 43.
Katz M. P., 44, 55, 56.
Kelemen I., 8.
Kelvin Lord, 70, 104.
Kepler, 74.
Klein S, 44, 55.
Kuratowski C., 70.

Lagrange L. I., 8, 68.
Lalan V., 69.
Lambrino G., 1.
La Menza F., 127.
Landes F., 54.
Landmann S., 21, 22, 23, 35, 36, 46, 59, 60, 71, 82.
Lascu I., 21, 22, 33, 34, 46.
Lățea P. C., 35, 36, 45, 46, 47, 70, 71, 81, 82, 91, 92, 94, 95, 96, 105, 106, 107, 108, 116, 118, 119, 120, 129, 131, 137, 138.
Lațiu V., 1.
Lăzărescu Th. G., 44, 54.
Leber M. D-ra, 80.
Le Bon G., 64.
Leibnitz, 102.
Leja F., 70.
Lemoine, 3.
Leonida D., 1.
Lepădatu I. V., 44.
Levy P., 43.
Lewicky W., 43.
Lie S., 66.
Linteș I., 1, 54, 69.
Liteanu Gh., 1, 90, 114, 127.
Liuba Gh., 54.
Lobatschewsky, 65.
Longinescu A., 54.
Lorentz, 64.
Lupan A., 1.
Lupașcu E., 120.
Lupascu Gh. C., 11, 20, 91, 94, 95, 105, 107, 116, 117, 118, 119, 131.

Magheru I., 1.
Manasiu N. D., 10, 22.
Manoil A, 54.
Manoilescu M., 43.
Manolescu I. N., 9, 19, 32, 33.
Manughevici C., 2.
Mardan D., 2.
Mărgineanu I., 7, 12, 36, 48, 60, 72, 83, 84, 96, 108, 119, 131, 138.
Margulius M., 10, 11, 20, 21, 22, 23, 33, 34, 35, 36, 46, 47, 53, 54, 58,

59, 60, 71, 72, 80, 81, 82, 83, 84, 91, 92, 93, 94, 95, 105, 106, 107, 108, 116, 118, 119, 120, 129 137, 138.
Marinescu M. I., 56.
Marinescu M., 43.
Marinescu N. N., 32, 33.
Marinescu P., 32.
Mariş M., 9.
Marşieu T., 12, 20, 21, 22, 34, 56, 57, 59, 95.
Marţinian B., 44.
Măru D., 44, 54.
Mârza V., 59.
Maşcaş P., 46, 92, 94, 107, 120.
Matcescu Ş., 2.
Matei I., 130.
Mathot, 3.
Mătieş V. I., 53, 97.
Mazilu P., 106, 107, 116, 119, 131, 137.
Mecu I. I., 20, 21, 23, 33, 34, 35, 36, 45, 46, 59, 80, 119, 131.
Mecu M, 20, 21.
Mehedinţi D. D., 20, 21, 22, 33, 35, 36, 46, 60, 91, 92, 94, 107, 119, 120.
Mehlmann T., 55, 56.
Menelaus, 8.
Menza, 127.
Mereuţă E., 10, 20, 21, 22, 23, 24, 30, 33, 34, 35 46, 47, 58, 59, 70, 81, 84, 91, 94, 95, 105, 107, 116, 119, 120, 131, 137.
Meteş S, 95.
Meton, 42.
Meyer L., 19.
Miclescu A., 54.
Mihai Em., 2.
Mihăilă N., 107, 116.
Mihăileanu N. N., 8, 10, 11, 13, 20, 21, 22, 24, 33, 34, 36, 45, 46, 47, 56 58, 71, 80, 83, 105.
Mihaiu I., 119.
Mihoc G, 114.
Mikloşi C., 30.
Milea G. E, 94, 95, 106, 107, 116, 119, 120, 131, 137, 138.
Mill S. J., 41.
Miloia I., 2.
Minkowski, 64.
Mioc V., 2, 120, 132.
Mitruş S., 94.
Morţun *E*, 33.
Mothot, 3.
Motoc D. M., 10, 11, 12, 20, 21, 22, 24, 33, 34, 35, 46, 53, 47, 56, 59, 70, 71, 72, 80, 81, 82, 83, 84, 91, 92, 93, 94, 95, 105, 107, 108, 116, 118, 119, 120, 129, 131, 138.
Mureşanu Gh., 130.
Musta Şt., 33.
Myller A., 69.

N. C, 53.
Nadaşan St, 2.
Nagler M., 20, 21, 22, 23, 35, 45.
Naneş C D-ra, 107, 130.
Naneş Gh, 2.
Napier, 101.
Neacşu V., 19.
Negoescu Ş., 104.
Negrea A. L. M., 10, 21, 22, 23, 34, 45, 46, 59, 81, 82, 91, 92, 93, 94, 95, 105, 107, 116, 117, 118, 120, 129, 131 138.
Negretzu F., 44, 54, 56.
Nemeş C. D-ra, 94.
Nenciulescu H. 20, 23, 34, 45, 46, 47, 71, 81, 82, 83, 91, 92 116, 119, 120, 131, 137.
Neştianu Gh. Gh., 44.
Nestor Gh. D, 9, 19, 23, 104.
Nestoroscu V., 104.
Neuberg J., 3, 73.
Newton 37, 39, 40, 41, 74, 89, 112, 113, 123.
Nichifor Gh., 2.
Nicoară D. C., 107.
Nicolaescu St., 10, 21, 22.
Nicolau A., 2, 12, 72
Nicolau Costin, 44, 116.
Nicolau H. C., 44.
Nicolau P., 2.
Niculescu Al., 13, 44, 104, 121, 127.
Niculescu Gh., Căp., 30, 53. 85, 114, 127.
Niculescu M., 127, 136.
Niels, 63.
Nikodim O., 44.
Nobler E., 120.
Noguès R., 44.
Novacu A. V., 9, 24, 32, 33, 105.
Noyer, 28, 29.

Ocagne M., 8.
Onicescu O., 2.
Oprea D. St. Breznica, 21.
Oraşeanu D. C., 2, 42, 90, 114.
Oraşeanu Gr., 2.
Oresme N., 112.
Oţel T. D-ra, 95, 105.
Oughtred W., 101, 102, 112. 123.
Ozenam, 113.

Pacioli L, 112, 113.
Paki E., 22.
Pamula A., 44.
Panaitescu Sc., 114.
Pănescu N., 107, 131, 138.
Pănoiu E, 22, 34, 35, 45, 60, 72, 81, 82, 91, 94, 95, 107, 119.
Pantazi M. A., 33, 44.
Panţu Z. I., 31, 32, 33.
Pârăianu N., 44, 54, 56.
Parepeanu C. I., 11, 20, 21, 23, 34, 46.
Pascal, 49, 50.
Patran I. N., 32, 33.
Patraulea N. R., 94, 107, 116, 120.
Pătroianu I. M., 44, 54, 56.
Păun V. N, 138.
Păunescu N., 34, 35, 45, 47, 60, 71, 82, 84, 91, 92, 93, 95, 120, 131.
Pavel D., 43.
Pavel H. N., 32 33.
Pell J., 102.
Percea V., 56.
Petre G. C., 20, 94, 05, 120, 137.
Petrescu A., 2.
Petrescu D. C., 107, 119.
Petrică I. I., 11.
Pinchls M., 54, 56.
Piţulescu N. Gh., 92.
Platon, 38, 41.
Podariu A., 9.
Poincaré A., 61.
Poincaré H., 40, 43, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 88.
Pollak A., 44.
Pompei D., 79, 114.
Pop Al, 44.
Pop I. L., 10. 11, 22, 23, 24, 33, 34, 35, 45, 46, 47.
Popa I., 44.
Popa B. I., 10, 11, 21, 23, 24, 34, 138.
Popa Gh I, 21, 23, 33, 34, 44 59, 60, 71, 80, 91, 105, 107, 118, 119, 120, 138.
Popa N., 119, 131.
Popa D. Tr., 10, 20, 21, 92, 94, 95, 107.
Popeanu A., 56.
Popescu Adr., 106, 116, 118, 120.
Popescu I. Al, 22, 34.
Popescu N. C., 32, 33, 44, 54.
Popescu E, 2.
Popescu E. E., 32.
Popescu Iancu, 56.
Popescu Ilie, 2.
Popescu Iosif, 22.
Popescu N. N., 56.
Popescu N. P., 91, 92, 93, 94.
Popescu C. St, 20, 21, 22, 23, 33, 34, 45, 47. 59, 60, 80, 91, 92, 93, 94, 95, 105, 107, 116, 118, 119, 120, 129.
Popescu D. St. 44.
Popescu C. V., 32, 33.
Popovici Gh A. C, 105.
Popovici C. C., 44.
Popovici T. I., 33, 44, 54, 120.
Popoviciu Tib., 44, 45, 54, 55, 56, 69, 105.
Porumbescu D., 20, 60, 72, 92, 107, 116, 118, 120, 131.
Preda C. C., 131.
Predoescu I. M., 21, 22, 34, 35, 46, 59, 60, 71, 82, 83. 91, 92, 93, 94, 95, 106, 107, 115, 116, 118, 119, 120, 131, 136, 138.
Predoiu Fl., 24, 34
Procopiescu M., 137.
Protopopescu I, 2.
Prudhomme S., 62.
Purcariu I., 2.
Purcel A., 11, 20, 21, 22, 23, 33, 34.
Purdilă A., 10.

Racliş N. R., 2, 114.
Racoţeanu I., 106, 107, 119, 120, 131.
Rădulescu C. M., 32, 33.
Rădulescu P. St., 56.
Răduleţ R., 105.
Rahn H J., 102, 123.
Râmniceanu I. C., 45, 54.
Ramus, 112.
Ratz P, 16.
Recorde R., 89, 123.
Reghiş P., 34, 46, 92.
Rezeanu P. M., 94, 95, 106, 107, 116, 119, 120.
*R*icorde R., 89.
Riemann, 65.
Ristea N. M., 56.

Rizescu T. I., 15.
Roche E. dela, 113.
Rogojan A., 120.
Rohn, 123.
Roibănescu C., 2.
Roman I. I., 32
Roşca S. Gh., 20, 21.
Roşca S. Veronica, D-ra, 20, 35, 72, 84.
Rosenblatt A, 53.
Roşu Al., 127.
Rudolff Cr., 113.
Rusu D. C., 11, 20, 35.

Saegiu E., 2.
Sâmbotin Gh., 131, 137, 138.
Samoilă D., 54.
Şandovici V., 119 137.
Sandu I., 94, 95:
Săndulescu I. I, 120, 126, 132.
Sanalevici S., 70.
Santo S., 56.
Sauciuc L., 2.
Savin C. J., 32, 45, 48, 54, 60, 72, 78, 90, 96, 108, 113, 138.
Savovici Fl., 20, 21, 22, 34, 35, 46, 47, 59, 60, 82, 83, 84, 91, 92, 94, 107, 116, 118.
Scheubel, 112.
Schileru D. I., 2, 45, 56, 108, 120,
Schlesinger L., 43.
Schneller C., 120.
Schoner, 112.
Schwartz B. N., 95, 131.
Scodrano Al., 56.
Scripcă M, 9.
Segall L., 19.
Segârceanu D. C., 32, 33.
Şeptilici R., 45.
Şerban T., 20, 21, 33, 34, 45, 60, 82.
Şerbu D. C., 107, 116.
Sergescu P., 2, 87, 88, 114.
Severineanu C., 2.
Siara I. V., 130.
Sierpinski W., 44, 70.
Silion Gh. I., 45, 54.
Simionov P. K., 32, 33.
Simson, 3, 4, 15, 16, 29.
Simpson, 121, 122 124, 126.
Singer I, 54.
Smighelschi O., 2.
Smith E., 88, 123.
Smith E. D., 101, 112.
Soare I. I., 107, 130.
Soare I. R., 119.
Sodre da Gama S., 8.
Solacolu S., 45.
Solomon N., 45, 56.
Solomon W, 56.
Soula J., 70
Sova C. I. Grigoreni, 21, 23, 24, 34, 45, 47, 59, 60, 72, 81, 82, 91, 92.
Sprinceană Gh., 32.
Stamatescu I. V., 45, 54.
Stamatiu I. M., 56.
Stambuleanu A., 2.
Stan I. A., 9, 14, 19, 32, 33.
Stan C., 9.
Stan I. I, 20, 21, 22, 35, 45, 46.
Stancescu C., 2.
Stănculescu I. C., 54.
Stănescu I., 116.
Stantzel E, 2.
Ştefănescu Anibal, 46, 59, 70, 81, 82, 92.
Ştefănescu E, 16, 44, 45, 54, 56.
Ştefănescu I. I., 46.
Ştefănescu O., 2
Sterie N. I, 116, 119.
Stevin, 112.
Stoenescu I, 44, 45, 54, 56,
Stoica N. A, 33.
Stoica D., 95.
Stoica Gh. I. S-Lt., 23, 35, 46, 59, 71, 92, 94, 105, 107, 117, 118, 119, 120, 131, 137.
Stoicescu I. E., 23, 34, 35, 37, 46, 70, 81, 91, 93, 94.
Stoicescu L., 2.
Süli M, 92, 94, 95. 107, 116, 117, 118, 120, 132, 137, 138.
Szabo I. D-ra, 80.

Tănase V. O., 21.
Tănăsescu Gh. A. Lt.-Col, 136.
Ţanovici V. C., 31, 33, 44, 54.
Tărăbuţă C. P., 45, 54, 55, 56.
Ţarălungă D., 131.
Tăraş V., 19, 56.
Tartaglia, 112, 113, 123.
Tauber A, 45, 56.
Tăutu Şt., 23, 24, 33.
Taylor, 15, 70.
Tenichi Al., 131.
Teodoreanu V., 30.
Teodorescu C., 2, 3, 13, 25, 37, 49, 61, 73, 85, 97, 109, 121, 133.
Teodorescu N., 43.
Teodosiu A., 2.
Terna M. D-ra, 80.
Thébault V., 14, 18, 28, 43, 69, 73, 76, 84, 96, 99, 108, 114, 120, 132, 136.
Theodoriadi L., 94, 106, 107, 118.
Tica P. M., 11, 21, 22, 33, 36, 45, 46, 47, 59, 60, 70, 71, 72, 81, 82, 83, 84, 91, 92, 94, 95, 107, 118, 119, 120.
Ţigănescu D. T., 137.
Ţino O., 2, 16, 108.
Tisserand, 62.
Ţiţeica Gh., 13, 90.
Tonolo A., 43.
Toulouse Dr., 63.
Toussaint A., 8.
Trică S. I., 33, 34, 35, 36, 46, 47, 58, 59, 60, 71, 72, 82, 83, 84, 91, 92, 93, 94, 95, 107, 118, 119, 120, 127, 131.
Trişcă S. I., 20, 21, 22, 23, 105, 106.
Tuducescu A. N., 45, 56.

Udriski Tr., 54.

Vâlcovici V., 2.
Vasilescu B., 32, 33.
Vasilescu Karpen N., 114.
Vasiliu Gh. Gh., 9, 33.
Vasiliu L. Gh, 116, 117, 118, 120, 132, 138.
Vasiliu C. I., 45, 54, 69, 105.
Vasiliu I. M, 107, 116.
Vasiliu N. St., 45.
Vasu N., 130.
Velicescu N. N., 21.
Verenca M. S, 107.
Vestulani F. C., 115.
Vieira de Campos O., 8.
Vieta, 89, 112.
Virag Veronica D-ra, 21, 23.
Villars-Gauthier, 62.
Vlad I, 2.
Vlădea I., 33
Vladimirschi V., 32, 33.
Vonica C. I., 20, 33, 46.
Vrânceanu G., 19, 70.
Vuibert, 44.

Wallace, 3.
Wallis, 112
Weiss L, 45.
Weiss S., 45
Weissmann M., 10.
Wetter Anna D-ra, 55.
Widmann J, 89.
Wing V., 102.
Winkler A., 9, 32, 33.
Wolf Ch., 102.
Wolibner W., 70.
Wright E, 101.

Xavier A, 8.
Xylander, 123.

Zagaican I., 32.
Zăgănescu I., 2.
Zaharia I. N., 54.
Zaharia O. N, 32, 37, 61, 65, 88.
Zamfir D., 59, 83, 94.
Zamfir O., 91, 92.
Zamfirescu Gh. I., 3, 9, 18, 33, 48, 52, 60.
Zane D. N., 35, 91.
Zapan Gh., 69.
Zapan Gr., 2.

Rugăm pe corespondenţii noştrii, a trimite de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T.“ pe anul XIII, care începe la 15 Martie 1933.

BIBLIOTECA „ASTRA“
SIBIU

5 lei